S. Le Roux et V.Nesme Le 8 décembre 2004

Logique – TD n°10

Modèles

Rappels de cours : *Modèles*

On considère un *langage* $\mathcal{L}$, *i.e.* un couple $\langle\mathcal{F},\mathcal{R}\rangle$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble de symboles fonctionnels d'arités définies et $\mathcal{R}$ est un ensemble de symboles relationnels d'arités définies.

Sur ce langage, on peut définir des $\mathcal{L}$-*termes* et des $\mathcal{L}$-*formules* par la grammaire suivante, où $\mathcal{X}$ est un ensemble infini de variables ($R \in \mathcal{R}$; $f \in \mathcal{F}$; $x \in \mathcal{X}$) :

$$\begin{array}{rcll} \varphi,\psi & ::= & \bot \mid R(t_1,\ldots,t_k) \mid \neg\varphi \mid \varphi{\rightarrow}\psi \mid \varphi{\wedge}\psi \mid \varphi{\vee}\psi \mid \forall x(\varphi) \mid \exists x(\varphi) & \text{(formule)} \\ t_1,\ldots,t_k & ::= & x \mid f(t_1,\ldots,t_k) & \text{(terme)} \end{array}$$

On appelle $\mathcal{L}$-*structure* tout couple $\mathcal{M}{=}\langle M, I\rangle$ où M est un ensemble appelé *domaine* et I une *interprétation*, *i.e.* une fonction qui à chaque symbole d'arité k de $\mathcal{F}$ associe une fonction k-aire totale de M et à chaque symbole d'arité k de $\mathcal{R}$ associe une partie de M^k.

Étant donné un contexte $\gamma : \mathcal{X} \longrightarrow M$, on peut étendre l'interprétation aux termes :
- $I_\gamma(x) = \gamma(x)$;
- $I_\gamma(f(t_1,\ldots,t_k)) = I(f)(I_\gamma(t_1),\ldots,I_\gamma(t_k))$.

La *valeur de vérité* d'une $\mathcal{L}$-formule dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ avec le contexte γ est un booléen (0 ou 1) défini comme suit :
- $V_\gamma(\bot) = 0$;
- $V_\gamma(R(t_1,\ldots,t_k)) = 1$ si et seulement si $(I_\gamma(t_1),\ldots,I_\gamma(t_k)) \in I_\gamma(R)$;
- $V_\gamma(\neg\varphi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 0$;
- $V_\gamma(\varphi{\rightarrow}\psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 0$ ou $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\varphi{\wedge}\psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 1$ et $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\varphi{\vee}\psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 1$ ou $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\forall x(\varphi)) = 1$ si et seulement si pour tout $m \in M$, $V_{\gamma[x\mapsto m]}(\varphi) = 1$
- $V_\gamma(\exists x(\varphi)) = 1$ si et seulement si il existe $m \in M$ tel que $V_{\gamma[x\mapsto m]}(\varphi) = 1$

Si φ est une formule close, sa valeur de vérité dans $\mathcal{M}$ ne dépend pas de l'environnement. Si cette valeur est 1, l'on dit que $\mathcal{M}$ est un *modèle* de φ, ou encore que $\mathcal{M}$ satisfait φ, ce que l'on note $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Sinon, l'on dit que $\mathcal{M}$ est un *contre-modèle* de φ.

Une formule est appelée *théorème* si toute $\mathcal{L}$-structure en est un modèle. Un ensemble de formules est dit *cohérent* s'il existe une $\mathcal{L}$-structure qui satisfait toutes ses formules.

Exercice 1 : *Interprétation*

On considère le langage $\langle\emptyset,\{R\}\rangle$, où R est un symbole de relation binaire. Pour chacune des formules et des structures ci-dessous, dire si la structure est un modèle ou un contre-modèle de la formule.

1. $\forall x\forall y\forall z(\neg R(x,x) \wedge (R(x,y){\rightarrow}\neg R(y,x)) \wedge (R(x,y) \wedge R(y,z){\rightarrow}R(x,z)))$
2. $\exists x\forall y(R(x,y) \vee x = y)$
3. $\exists x\forall y(R(y,x) \vee x = y)$
4. $\forall x\exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z){\rightarrow}(z = y \vee R(y,z))))$
5. $\forall x\forall y(R(x,y){\rightarrow}\exists z((R(x,z) \wedge R(z,y))))$

1. $\langle \mathbb{N}, R \mapsto < \rangle$: $\mathbb{N}$ où R est interprété par $<$.
2. $\langle \mathbb{Q}, R \mapsto < \rangle$: $\mathbb{Q}$ où R est interprété par $<$.
3. $\langle \mathfrak{P}\mathbb{N}, R \mapsto \subsetneq \rangle$: les parties de $\mathbb{N}$ où R est interprété par $\subsetneq$.

Exercice 2 : ***Satisfaction***

Soit $\mathcal{L} = \langle \{0, 1, +, \times\}, \{=\}$ où 0 et 1 sont nullaires, $+$ et $\times$ sont binaires et = est binaire. Soient $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{Z}, I_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle M_{2,2}(\mathbb{Z}), I_2 \rangle$, $\mathcal{M}_3 = \langle \mathbb{Z}[i], I_3 \rangle$, où I_1, I_2, I_3 interprètent de manière usuelle les symboles de $\mathcal{L}$.

Écrire des formules φ_1, φ_2, φ_3 telles que :

1. $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$, $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi_1$, $\mathcal{M}_3 \not\models \varphi_1$.
2. $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_2$, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$, $\mathcal{M}_3 \not\models \varphi_2$.
3. $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_3$, $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi_3$, $\mathcal{M}_3 \models \varphi_3$.

Exercice 3 : ***Nombre d'éléments***

Écrire des formules signifiant :

1. Le domaine de la structure a au moins n éléments.
2. Le domaine de la structure a au plus n éléments.
3. Le domaine de la structure a exactement n éléments.

Exercice 4 : ***Théorie des groupes***

On considère les formules sur le langage $\mathcal{L}$ $\langle \{\varepsilon, ^{-1}, *\}, \{=\} \rangle$, où ε, $^{-1}$, $*$ sont respectivement nullaire, unaire et binaire et où $=$ est binaire.

La théorie de l'égalité sur $\mathcal{L}$ est constituée des axiomes suivants :

(réfl)	:	$\forall x (x = x)$
(sym)	:	$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
(trans)	:	$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
(cptb-$^{-1}$)	:	$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow x^{-1} = y^{-1})$
(cptb-$*$)	:	$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 = y_1 * y_2)$.

La théorie des groupes est la théorie $\mathcal{G}$ obtenue en ajoutant à cette théorie les trois axiomes :

(assoc)	:	$\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z)$
(eltn)	:	$\forall x (x * \varepsilon = x \ \wedge \ \varepsilon * x = x)$
(inv)	:	$\forall x (x * x^{-1} = \varepsilon \ \wedge \ x^{-1} * x = \varepsilon)$

Pour la théorie des groupes abéliens $\mathcal{GA}$, on rajoute encore l'axiome :

(comm) : $\forall x \forall y (x * y = y * x)$

1°) Montrer que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{GA}$ sont cohérentes.
2°) Montrer formellement dans $\mathcal{G}$ que l'inverse à droite est unique.
3°) Montrer que $\mathcal{GA} \vdash \forall x \forall y ((x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1})$.
4°) Montrer que tout modèle de $\mathcal{G} \cup \{\forall x (x * x = e)\}$ satisfait $\mathcal{GA}$.

Exercice 5 : ***Skolemisation***

1°) À chaque formule φ du langage L avec $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$, on associe un symbole de constante distinct de tous les autres[1] f_φ et une phrase

$$\forall x_1 \ldots x_n \ (\exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)))$$

qui est nommée l'axiome de Skolem pour φ.

Partant d'une théorie T sur le langage L, on définit une théorie T^{sk}, la théorie skolémisée de T, définie sur un langage étendu, comprenant les axiomes de T et les axiomes de Skolem de toutes les formules du langage.

2°) Montrer que si $\mathfrak{A}$ est un modèle de T, alors il existe une structure $\mathfrak{A}^{sk}$ qui est un modèle de T^{sk} et telle que les interprétations de formules de L dans $\mathfrak{A}^{sk}$ soient les mêmes que les interprétations correspondantes dans $\mathfrak{A}$.

3°) En déduire que, si ψ est une formule du langage L prouvable dans T^{sk}, alors ψ est prouvable dans T.

[1] Effectivement, ça ne veut rien dire.