

# Logique – TD n° 11

## Théorie des ensembles

### Rappels de cours : Axiomatique de Zermelo-Frænkel

La théorie ZF est la théorie dont les axiomes sont les suivants :

1. Axiome d'extensionnalité :  
 $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$
2. Axiome de réunion :  
 $\forall a \exists u \forall x (x \in u \Leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in a))$
3. Axiome de l'ensemble des parties :  
 $\forall a \exists p \forall x (x \in p \Leftrightarrow x \subset a)$  où «  $e \subset f$  » est une abréviation de la propriété «  $\forall t (t \in e \Rightarrow t \in f)$  ».
4. Schéma d'axiome de substitution :  
 $\forall m_1 \dots \forall m_k \forall a (\forall u \forall v \forall w (u \in a \wedge \pi_{m_1 \dots m_k}(u, v) \wedge \pi_{m_1 \dots m_k}(u, w) \Rightarrow v = w)$
5. Axiome de l'infini :  
 $\Rightarrow \exists b \forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \pi_{m_1 \dots m_k}(x, y)))$   
 $\exists z (\emptyset \in z \wedge \forall x (x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z))$

On définit de même que dans le cours les notations  $\cup a$  pour la réunion des éléments de  $a$  et  $\mathfrak{P}a$  pour l'ensemble des parties de  $a$ ;  $\emptyset$  pour l'ensemble vide;  $\cup$ ,  $\cap$  et  $\times$  pour les opérateurs d'union, d'intersection et de produit cartésien;  $\{z\}$  pour les singletons.

On rappelle que de l'axiome (iv) on déduit ce qu'il est convenu d'appeler le schéma d'axiome de compréhension :  $\forall m_1 \dots \forall m_k \forall a \exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge \pi_{m_1 \dots m_k}(x)))$ .

### Exercice 1 : De l'axiome de la paire au théorème de la paire

Dans le cours, on a introduit l'axiome dit de la paire :  $\forall a \forall b \exists d \forall x (x \in d \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$ .  
 Montrer que cet axiome est en fait une conséquence des quatre premiers axiomes de ZF.

### Exercice 2 : Où l'on parle d'ordinaux

#### Ensemble bien ordonné ; bon ordre

Soient  $R(\cdot, \cdot)$  une relation binaire et  $a$  un ensemble.

L'ensemble  $a$  est dit (strictement) bien ordonné par  $R$  si  $R$  est une relation d'ordre (strict) sur  $a$  et tout sous-ensemble non vide de  $a$  possède un plus petit élément pour  $R$ .

La relation  $R$  est dite de bon ordre (strict) si  $R$  est une relation d'ordre (strict) et pour tout  $x$  du domaine de  $R$ , la collection  $R(\cdot, x)$  est un ensemble (strictement) bien ordonné par  $R$ .

1°) Montrer qu'un ensemble (strictement) bien ordonné est totalement (strictement) ordonné.

#### Définition et propriétés des ordinaux

On dit qu'un ensemble  $\alpha$  est un ordinal si :

- $\in$  est une relation de bon ordre strict sur  $\alpha$ ;
- $\forall x (x \in \alpha \Rightarrow x \subset \alpha)$ .

On désigne par  $\mathfrak{O}(\cdot)$  la collection des ordinaux.

2°) Montrer que  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$  et  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  sont des ordinaux.

3°) Montrer que les segments initiaux stricts d'un ordinal sont ses éléments. (On appelle segment initial de  $a$  pour l'ordre  $\prec$  tout ensemble de la forme  $\{x \in a / x \prec e\}$  où  $e \in a$ .)

4°) Montrer que les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.

5°) Montrer qu'un ordinal n'est pas élément de lui-même.

6°) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux. Montrer que l'une et l'une seulement des trois propositions suivantes est vraie :  $\alpha=\beta$ ,  $\beta\in\alpha$ ,  $\alpha\in\beta$ .

7°) Montrer que  $\in$  est un bon ordre strict sur  $\mathfrak{O}$ .

Dorénavant, on notera  $<$  la relation  $\in$  sur les ordinaux, et  $\leq$  la relation  $\in\vee=$ . Dans la suite, les termes (*strictement*) *supérieur* et *inférieur* font référence à  $\leq$  (à  $<$ ).

8°) Montrer que sur les relations  $\leq$  et  $\subset$  sont logiquement équivalentes sur les ordinaux.

9°) Montrer que la collection  $\mathfrak{O}$  des ordinaux n'est pas un ensemble.

10°) Soit  $\alpha$  un ordinal. Montrer que le plus petit ordinal supérieur à  $\alpha$  est  $\alpha \cup \{\alpha\}$ , noté  $\alpha + 1$ .

11°) Montrer que tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure dans  $\mathfrak{O}$ , et définir explicitement cette dernière.

### Ordinaux et ensembles bien ordonnés

12°) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux et  $f : \alpha \rightarrow \beta$  une application strictement croissante. Montrer que  $\alpha \leq \beta$  et  $\xi \leq f(\xi)$  pour tout  $\xi \in \alpha$ .

13°) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux et  $f : \alpha \rightarrow \beta$  un isomorphisme d'ensembles ordonnés de  $(\alpha, \leq)$  sur  $(\beta, \leq)$ . Montrer que  $\alpha=\beta$  et que  $f$  est l'application identique.

14°) Soit  $(u, \prec)$  un ensemble strictement bien ordonné. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de  $u$  sur un ordinal.

### **Exercice 3 : Axiome du choix et cardinaux**

#### L'axiome du choix

L'*axiome du choix* est célèbre en mathématiques. Il peut s'énoncer comme suit :  
 $\forall a((\forall x(x \in a \Rightarrow x \neq \emptyset)) \wedge \forall y \forall z (y \in a \wedge z \in a \Rightarrow y = z \vee y \cap z = \emptyset)) \Rightarrow \exists b \forall u \exists v (u \in a \Rightarrow b \cap u = \{v\})$ .

En ajoutant cet axiome à ceux de la théorie ZF, on obtient la théorie dite ZFC. On admet que le lemme de Zermelo : *tout ensemble admet un bon ordre* est équivalent à l'axiome du choix. Dans toute la suite, on se place dans la théorie ZFC.

#### Cardinaux

1°) Montrer que tout ensemble est équipotent à un ordinal.

Soit  $a$  un ensemble. On appelle *cardinal* de  $a$ , noté  $\text{card}(a)$ , le plus petit ordinal équipotent à  $a$ . Deux ensembles sont donc équipotents si et seulement s'ils ont le même cardinal.

2°) Soient  $a$  et  $b$  deux ensembles non vides. Montrer que ces propositions sont équivalentes :

1. il existe une injection de  $a$  dans  $b$  ;
2. il existe une surjection de  $b$  sur  $a$  ;
3.  $\text{card}(a) \leq \text{card}(b)$ .

3°) Montrer le théorème de Cantor-Bernstein : *deux ensembles sont équipotents si et seulement s'il existe une injection de chacun d'eux dans l'autre.*

4°) Montrer le théorème de Cantor : *pour tout ensemble  $a$ ,  $\text{card}(a) < \text{card}(\mathfrak{P}a)$ .*

On note  $\mathfrak{C}(\cdot)$  la collection des cardinaux ; elle est définie par l'énoncé  $\mathfrak{C}(\alpha)$  : «  $\alpha$  est un ordinal qui n'est équipotent à aucun ordinal strictement inférieur à lui. »

5°) Montrer que la collection  $\mathfrak{C}$  des cardinaux n'est pas un ensemble.