S. Le Roux et V.Nesme le 3 janvier 2005

Logique – TD n°12

Modèles de Kripke

Rappels de cours : ***Modèles de Kripke en logique intuitionniste***

Un *modèle de Kripke* est un triplet $\mathrm{M} = \langle U, \preccurlyeq, I\rangle$ où

– U est un ensemble appelé *univers* dont les éléments sont appelés *mondes* ;
– $\preccurlyeq$ est un préordre (*i.e.* une relation réflexive et transitive) sur U appelé relation d'*accessibilité* ;
– $I : \mathrm{V} \longrightarrow \mathfrak{P}(U)$ est une fonction dirigée, *i.e.* si $u \in I(a)$ et $v \succcurlyeq u$, alors $v \in I(a)$.

On définit sur $U{\rightarrow}\Phi$ (où Φ est l'ensemble des formules) une relation binaire $\Vdash$ dite relation de *forçage* par :

– si $\varphi = a \in \mathrm{V}$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \in I(a)$;
– si $\varphi = \rightarrow\psi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si pour tout $v \succcurlyeq u$, si $v \nVdash \psi$;
– si $\varphi = \psi\wedge\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \Vdash \psi$ et $u \Vdash \chi$;
– si $\varphi = \psi\vee\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \Vdash \psi$ ou $u \Vdash \chi$;
– si $\varphi = \psi{\rightarrow}\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si pour tout $v \succcurlyeq u$, si $v \Vdash \psi$, alors $v \Vdash \chi$;
– si $\varphi = \bot$, $u \nVdash \varphi$.

On dit que $\mathrm{M} = \langle U, \preccurlyeq, I\rangle$ *réalise* une formule φ (ou est un modèle de φ), ce que l'on note $\mathrm{M} \VDash \varphi$, si pour tout monde $u \in U$, $u \Vdash \varphi$.

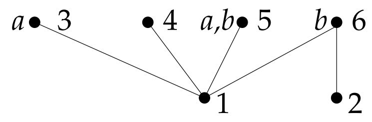
On dit que φ est *valide* (au sens de l'intuition) si elle est réalisée dans tout modèle de Kripke. On note alors $\VDash \varphi$.

Les deux théorèmes fondamentaux suivants établissent une correspondance entre validité (au sens de l'intuition) et démontrabilité en logique intuitionniste :

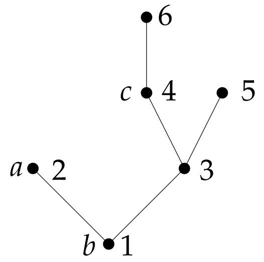
– **Correction** : si $\vdash_{\mathrm{LI}} \varphi$, alors $\VDash \varphi$.
– **Complétude** : si $\VDash \varphi$, alors $\vdash_{\mathrm{LI}} \varphi$.

Exercice 1 : ***Un exercice ~~débile~~ graphique***

1°) Dans le modèle de Kripke donné par le graphe ci-dessous, préciser quels mondes forcent a, $\rightarrow a$, b, $\rightarrow b$, $a{\rightarrow}b$, $b{\rightarrow}a$, $a\wedge b$, $b\vee a$, $a{\rightarrow}b{\rightarrow}a$, $(\rightarrow a{\rightarrow}a){\rightarrow}a$.



2°) Dans le modèle de Kripke donné par le graphe ci-dessous, préciser quels mondes forcent a, $\rightarrow a$, b, $\rightarrow b$, c, $\rightarrow c$, $c{\rightarrow}a$, $c{\rightarrow}b$, $a{\rightarrow}b$, $b{\rightarrow}a$, $\bot$, $a\wedge b$, $c\vee a$, $(a{\rightarrow}b{\rightarrow}c){\rightarrow}(a{\rightarrow}b){\rightarrow}a{\rightarrow}c$.



Exercice 2 : ***Logique classique vs. logique intuitionniste***

Pour chacune des formules suivantes, donner un arbre de démonstration en logique classique et un contre-modèle de Kripke :

1. $\to\to p\to p$
2. $\to p\vee\to\to p$
3. $(\to p\to\to q)\to q\to p$
4. $((\to p)\to p)\to p$
5. $(p\to q)\to\to p\vee q$

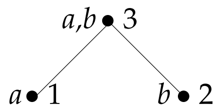
Exercice 3 : ***Indépendance de connecteurs***

Soient C un ensemble de connecteurs logiques et $\maltese$ un connecteur k-aire n'appartenant pas $\to$ C. On dit que $\maltese$ est *indépendant* de C s'il n'existe pas de formule $\varphi(a_1,\dots,a_k)$ écrite uniquement avec les connecteurs de C telle que $\vdash \maltese(a_1,\dots,a_k) \leftrightarrow \varphi(a_1,\dots,a_k)$

Dans toute la suite, on se place en logique intuitionniste. Il conviendra donc d'entendre par $\vdash$ la déduction naturelle intuitionniste.

1°) Montrer que $\to$ est indépendant de $\{\wedge,\vee,\to\}$.

2°) On considère le modèle de Kripke M ci-dessous :



1. Soit ψ une formule ayant a et b comme variables propositionnelles et ne contenant que les connecteurs $\vee$, $\to$, $\to$, $\perp$. Montrer que si $\alpha_3 \Vdash \psi$ alors $\alpha_1 \Vdash \psi$ ou $\alpha_2 \Vdash \psi$.
2. En déduire que $\wedge$ est indépendant de $\{\vee,\to,\to,\perp\}$.

Exercice 4 : ***Correction et complétude***

1°) Montrer la correction (intuitionniste) de la logique intuitionniste.

Un ensemble Δ de formules est dit *saturé* si $\Delta \nvdash \perp$ et, pour toutes formules φ et ψ, si $\Delta \vdash A \vee B$, alors $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$.

2°) Soit φ une formule et Γ un ensemble de formules tel que $\Gamma \nvdash A$. Montrer que Γ est contenu dans un ensemble saturé Δ tel que $\Delta \nvdash A$.

3°) Soit Δ_0 un ensemble saturé. On définit le triplet M $= \langle U, \subseteq, I\rangle$ où U est l'ensemble des ensembles saturés contenant Δ_0 et $I(a) = \{\Delta \supseteq \Delta_0 / a \in \Delta\}$. Montrer que ceci définit un modèle de Kripke et que dans ce modèle on a, pour tout ensemble saturé Δ contenant Δ_0 et pour toute formule φ : $\Delta \Vdash \varphi$ si et seulement si $\varphi \in \Delta$.

4°) En déduire la complétude de la logique intuitionniste.