S. Le Roux et V.Nesme Le 6 octobre 2004

Logique – TD n°2

Logique minimale de Hilbert
Logique propositionnelle intuitionniste

Rappels de cours : ***Logique minimale de Hilbert***

Les formules de la logique minimale de Hilbert (en abrégé, LM) sont construites uniquement avec le connecteur $\to$. Ses jugements sont de la forme $\vdash \varphi$, où φ est une formule.
Il n'y a en logique minimale que deux *axiomes*, K et S, et une *règle*, le *modus ponens* :

$$\frac{}{\vdash \alpha\to\beta\to\alpha}\ (\mathsf{K}) \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\ (\mathsf{S}) \qquad \frac{\vdash \alpha\to\beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}\ (MP)$$

Exercice 1 : ***Correction (au sens classique) de Hilbert***

Montrer que LM est classiquement correct.

Exercice 2 : ***Des théorèmes***

Montrer les théorèmes suivants :
1°) (I) : $\vdash \alpha\to\alpha$.
2°) (B) : $\vdash (\alpha\to\beta)\to(\gamma\to\alpha)\to\gamma\to\beta$.

Exercice 3 : ***Des méta-théorèmes***

Montrer les règles suivantes :

1°) $\dfrac{\vdash \alpha\to\beta\to\gamma}{\vdash \beta\to\alpha\to\gamma}\ (\mathsf{C})$

2°) $\dfrac{\vdash \alpha\to\beta \quad \vdash \beta\to\gamma}{\vdash \alpha\to\gamma}$

Exercice 4 : ***Un autre théorème***

Montrer que $\vdash \alpha\to(\alpha\to\beta)\to\beta$ sans fournir l'arbre de dérivation.

Exercice 5 : ***Pour ceux qui aiment ça***

1°) $\vdash (\alpha\to\beta)\to\alpha\to\alpha$
2°) $\vdash (\alpha\to\beta\to\gamma)\to\beta\to\alpha\to\gamma$
3°) $\vdash (\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$
4°) $\vdash (\alpha\to\beta\to\gamma\to\delta)\to(\beta\to\alpha)\to(\beta\to\gamma)\to\beta\to\delta$

Exercice 6 : ***Le (méta-)théorème de la déduction***

Montrer que (si on peut démontrer $\vdash \beta$ en s'autorisant $\vdash \alpha$ comme hypothèse) équivaut à ($\vdash \alpha\to\beta$).

Rappels de cours : ***Logique intuitionniste***

Les formules de la logique intuitionniste à la Hilbert (en abrégé, LI) sont construites avec le connecteur nullaire $\perp$ ($False$) et les connecteurs binaires $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ (&). Ses jugements sont de la forme $\vdash \varphi$, où φ est une formule.
La logique intuitionniste se base sur la logique minimale, dont les axiomes et règle sont :

$$\frac{}{\vdash \alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha}\,(\mathrm{K}) \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma}\,(\mathrm{S}) \qquad \frac{\vdash \alpha\rightarrow\beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}\,(MP)$$

On rajoute à propos des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ les axiomes :

$(\vee 0)$:	$\vdash (p\rightarrow r)\rightarrow(q\rightarrow r)\rightarrow(p \vee q)\rightarrow r$	$(\vee 1)$:	$\vdash p\rightarrow(p \vee q)$	$(\vee 2)$:	$\vdash q\rightarrow(p \vee q)$
$(\wedge 0)$:	$\vdash p\rightarrow q\rightarrow(p\wedge q)$	$(\wedge 1)$:	$\vdash (p\wedge q)\rightarrow p$	$(\wedge 2)$:	$\vdash (p\wedge q)\rightarrow q$

Exercice 7 : ***Théorèmes et méta-théorèmes***

On pose $\neg\alpha \equiv \alpha\rightarrow\perp$.
1°) Montrer $\vdash p\rightarrow\neg\neg p$.
2°) Montrer que : ($\vdash \neg\neg p\rightarrow p$) équivaut à ($\vdash ((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$)
3°) Montrer $\dfrac{\vdash \neg\beta \quad \vdash \beta}{\vdash \neg\alpha}$ et $\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$.

Exercice 8 : Ex falso quodlibet sequitur ***(du faux on déduit ce que l'on veut)***

On ajoute l'axiome F : $\vdash \perp\rightarrow\alpha$.
Montrer $\dfrac{\vdash \neg\beta \quad \vdash \beta}{\vdash \alpha}$ et $\vdash (\neg\alpha \vee \beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$.

Exercice 9 : ***Validité classique et théorème de déduction***

Montrer ces résultats pour la logique intuitionniste à la Hilbert.

Exercice 10 : ***Logique propositionnelle intuitionniste***

1°) Montrer que les règles suivantes sont correctes dans LI :

$$\frac{\vdash \beta}{\vdash \alpha\rightarrow\beta}\,(\text{Drop}) \qquad \frac{\vdash \alpha\rightarrow\alpha\rightarrow\beta}{\vdash \alpha\rightarrow\beta}\,(\text{Double})$$

$$\frac{\vdash \gamma\rightarrow\alpha \quad \vdash \gamma\rightarrow\beta}{\vdash \gamma\rightarrow\alpha\wedge\beta}\,\wedge 3 \qquad \frac{\vdash \alpha\rightarrow\gamma \quad \vdash \beta\rightarrow\gamma}{\vdash (\alpha \vee \beta)\rightarrow\gamma}\,\vee 3$$

2°) Montrer les théorèmes suivants dans LI :
  i. $\vdash \alpha \vee \beta\rightarrow\beta \vee \alpha$;
  ii. $\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha \vee \gamma)\rightarrow(\beta \vee \gamma)$;
  iii. $\vdash \alpha \vee (\beta\wedge\gamma)\rightarrow(\alpha \vee \beta)\wedge(\alpha \vee \gamma)$.

3°) Montrer que la règle $\dfrac{\vdash \alpha\rightarrow\gamma \quad \vdash \beta\rightarrow\delta}{\vdash \alpha\wedge\beta\rightarrow\gamma\wedge\delta}$ est correcte dans LI.