S. Le Roux et V.Nesme Le 13 octobre 2004

Logique – TD n°3

Déduction naturelle

Rappel : quand on invoque un principe d'induction, il faut préciser sur quel objet, après s'être assuré qu'il est bien défini par induction. On rappelle les règles de la déduction naturelle classique, en abrégé DNC. Aucune hypothèse de finitude n'est faîte quant à Γ. On rappelle aussi que $\neg\alpha$ est simplement une notation pour $\alpha\to\bot$.

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\textit{r.a.a.}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\to\beta}\ (\to\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha\to\beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ (\to\text{-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}\ (\wedge\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\wedge\text{-E-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}{\Gamma \vdash \beta}\ (\wedge\text{-E-2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee\text{-E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta}\ (\vee\text{-I-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta}\ (\vee\text{-I-2})$$

1°) Définir P l'ensemble des propositions associées à DNC (On appellera V l'ensemble des variables propositionnelles).

Dans tout ce problème, on appellera "déduction naturelle classique minimale", en abrégé DNCM, la partie de DNC concernant uniquement les connecteurs $\to$ et $\bot$. Le symbole thèse associé sera noté $\vdash_M$.

2°) Définir P_M l'ensemble des propositions de DNCM ainsi que les règles de DNCM.

On définit une fonction f de P dans P_M de la façon suivante :

$$f(p) = p, \quad p \in V \cup \{\bot\} \qquad f(A \vee B) = \neg f(A)\to f(B)$$

$$f(A\to B) = f(A)\to fB) \qquad f(A\wedge B) = \neg(f(A)\to\neg f(B))$$

On appelle F la fonction qui à un ensemble Γ de propositions de P associe l'ensemble des images de ces propositions par f.

3°) Quelle méthode a-t-on utilisée pour définir la fonction f ?

L'objet du problème est de démontrer que $\vdash \varphi$ si et seulement si $\vdash_M f(\varphi)$.

4°) Interpréter le "résultat" ci-dessus. Quelles en sont les conséquences en terme de langage, d'arbres de preuve, de technique de preuve, etc.

5°) Que peut-on dire de $\Gamma \vdash \varphi$ si $\Gamma \vdash_M \varphi$ est dérivable dans DNCM ?

6°) Dans DNCM, montrer la règle d'affaiblissement et la règle "inverse de l'introduction de la flèche".

7°) Dériver les théorèmes suivants (dans DNCM) :
- $\vdash_M \neg(\alpha\to\beta)\to\alpha$
- $\vdash_M \neg(\alpha\to\neg\beta)\to\beta$

8°) Montrer les règles suivantes (dans DNCM) :

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash_M \beta}{\Gamma, \neg\beta \vdash_M \neg\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma \vdash_M \neg\alpha \to \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash_M \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash_M \gamma}{\Gamma \vdash_M \gamma}.$$

9°) Montrer que si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $F(\Gamma) \vdash_M f(\varphi)$ par induction sur l'arbre de dérivation de $\Gamma \vdash \varphi$.

10°) Montrer que si $\vdash f(\varphi) \to \varphi$ alors on a : $\vdash_M f(\varphi)$ implique $\vdash \varphi$.

11°) Montrer $\vdash f(\varphi) \to \varphi$ par induction sur φ.

12°) Conclure.