S. Le Roux et V.Nesme Les 11/13 octobre 2005

Logique – TD n°3

Déduction naturelle

Exercice 1 : ***Encore un peu de logique minimale de Hilbert***

1°) Montrer formellement que si $\vdash \alpha$ alors $\vdash \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n \to \alpha$.
2°) Montrer formellement que $\vdash \gamma \to \ldots \to \gamma$.

Rappels de cours : ***Déduction naturelle minimale***

Les formules de déduction naturelle minimale sont construites avec le connecteur binaire $\to$, comme pour la logique minimale de Hilbert. Ses jugements sont de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, où φ est une formule et Γ, appelé l'*antécédent*, un ensemble de formules.
Il n'y a en déduction naturelle qu'un axiome : $\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$ (hyp)

et deux règles : une d'introduction de la flèche et une d'élimination de la flèche :

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ (\to\text{-E})$$

Exercice 2 : ***La déduction naturelle, c'est plus facile que Hilbert***

Montrer en déduction naturelle les assertions suivantes :
- I : $\vdash \alpha \to \alpha$
- K : $\vdash \alpha \to \beta \to \alpha$
- S : $\vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$
- B : $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$
- $\vdash (\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta) \to (\beta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma) \to \beta \to \delta$

Exercice 3 : ***Affaiblissement***

Montrer la règle suivante, dite d'*affaiblissement* :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}\ (\text{aff.})$$

Exercice 4 : ***L'inverse de la règle d'introduction de la flèche***

Montrer que si $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ alors $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Exercice 5 : ***Théorème de déduction***

Généraliser le théorème de déduction du td précédent, toujours dans la logique de Hilbert.

Exercice 6 : ***Equivalence des logiques minimales de Hilbert et de déduction naturelle***

Montrer que $\Gamma \vdash_N \alpha$ si et seulement si $\vdash_H \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n \to \alpha$ où les γ_i sont les éléments de Γ.

Rappels de cours : ***Déduction naturelle intuitionniste***

On rajoute le connecteur nullaire $\perp$ et les connecteurs binaires $\vee$et $\wedge$. Il n'y a toujours qu'un axiome : $\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}\,(\text{hyp})$

et, pour chaque connecteur, il y a des règles d'introduction et d'élimination :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}\,(\textit{e.f.q.s.}) \qquad \dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\,(\to\text{-I}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\,(\to\text{-E})$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\,(\wedge\text{-I}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}\,(\wedge\text{-E-1}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}\,(\wedge\text{-E-2})$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\,(\vee\text{-E}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\,(\vee\text{-I-1}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\,(\vee\text{-I-2})$$

Exercice 7 : ***Quelques démonstrations en déduction naturelle***

- $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
- $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma)$
- $\vdash \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \to (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- $\vdash p \wedge (q \wedge r) \to (p \wedge q) \wedge r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\vdash (p \vee \neg p) \to (((p \to q) \to p) \to p)$
- $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
- Montrer que la règle suivante est correcte en DN : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg q \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p}$

Rappels de cours : ***Logique classique***

On enlève à la déduction naturelle la règle *e.f.q.s.* et on rajoute la règle de *reductio ad absurdum* :

$$\dfrac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}\,(\textit{r.a.a.})$$

Exercice 8 : ***Déduction naturelle classique***

Montrer en déduction naturelle classique les assertions suivantes :

$$\vdash \neg\neg p \to p \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}\,\perp\text{E} \qquad \dfrac{\Gamma, \neg p \vdash p}{\Gamma \vdash p}$$

$$\vdash p \vee \neg p \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg q \to \neg p}{\Gamma \vdash p \to q}\,\text{contrap} \qquad \vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

$$\dfrac{\Gamma, \neg p \vee \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \wedge q) \vdash r} \qquad \dfrac{\Gamma, \neg p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \vee q) \vdash r} \qquad \dfrac{\Gamma, p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \to q) \vdash r}$$