S. Le Roux et V.Nesme 8 et 10 novembre 2005

Logique – TD n°7

récriture et λ-calcul

Exercice 1 : ***Réduction – vrai ou faux ?***

Soit une relation de réduction $\xrightarrow{R}$.

On note $\xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow$ la *clôture réflexive-transitive* de $\xrightarrow{R}$, qui est définie par : $x \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow z$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $y_0, \ldots, y_n$ tels que $x = y_0$, $z = y_n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_{i-1} \xrightarrow{R} y_i$.
On appelle *forme R-normale* un élément irréductible pour $\xrightarrow{R}$.

La réduction $\xrightarrow{R}$ est dite :
- *confluente* si $a \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow b \wedge a \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow c \Rightarrow \exists d (b \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow d \wedge c \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow d)$;
- *fortement normalisante* s'il n'existe pas de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $a_i \xrightarrow{R} a_{i+1}$;
- *faiblement normalisante* si tout élément admet une forme normale ;
- *convergente* si elle est confluente et fortement normalisante ;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément a tel que $a \xrightarrow{R} \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow a$;
- *finitaire* si pour tout élément a l'ensemble $\{b / a \xrightarrow{R} b\}$ est fini ;
- *bornée* si pour tout a il existe n_a tel qu'il n'existe pas de b tel que $a \xrightarrow{R}^{n_a} b$.

Pour toutes les questions suivantes, on demande soit une démonstration formelle, soit un contre-exemple (lesquels pourront être donnés sous forme de graphe orienté).

1°) Une réduction fortement normalisante est-elle faiblement normalisante ? Et réciproquement ?
2°) On suppose que $\xrightarrow{R}$ est telle que tout élément admet une unique forme normale. $\xrightarrow{R}$ est-elle confluente ? Est-elle convergente ?
3°) Une réduction fortement normalisante est-elle acyclique ?
4°) Une réduction faiblement normalisante, non confluente et acyclique est-elle fortement normalisante ?
5°) Une réduction faiblement normalisante, confluente et acyclique est-elle fortement normalisante ?
6°) Une relation bornée est-elle fortement normalisante ?
7°) Une relation fortement normalisante est-elle bornée ?
8°) Une relation finitaire fortement normalisante est-elle bornée ?
9°) Une relation dont la clôture réflexive-transitive est fortement normalisante est-elle fortement normalisante ?

On rappelle la définition de certains termes spéciaux :
$\mathsf{I} = \lambda x.x$ $\mathsf{T} = \lambda x.\lambda y.x$ $\mathsf{F} = \lambda x.\lambda y.y$ $\mathsf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$.

Exercice 2 : ***Les entiers naturels en λ-calcul***

On souhaite encoder $\mathbb{N}$ et les opérations arithmétiques élémentaires en λ-calcul.
On pose par récurrence les entiers comme suit :

– $0 = \lambda s.\mathsf{I}$ (*i.e.* le combinateur F) ;
– si $\mathsf{n} \in \mathbb{N}$ a été défini, $\mathsf{n}+1$ est défini comme la forme normale de $\lambda s.\lambda z.s(\mathsf{n}sz)$.

1°) Écrire les valeurs de 1, 2 et 3. Quel combinateur représente n ?
2°) Définir des λ-termes représentant le successeur succ et les opération $+$ et $\times$.
3°) Définir un λ-terme Z tel que Zn représente le booléen « $\mathsf{n}=0$ ».
4°) On pose $\mathsf{pred} = \lambda n.n(\lambda p.\lambda z.z(\mathsf{succ}(p\mathsf{T}))(p\mathsf{T}))(\lambda z.z00)\mathsf{F}$.
Montrer que $\mathsf{pred}(\mathsf{n}+1) \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow \mathsf{n}$. Que vaut $\mathsf{pred}\,0$?
5°) Définir un λ-terme représentant l'opération $-$.