S. Le Roux et V.Nesme 14 et 17 novembre 2004

Logique – TD n°7

λ-calcul, types et logique combinatoire

Rappels de cours : *Types simples*

Les types simples sont définis ainsi, étant donné un ensemble $\mathcal{V}$ de variables de type :

$$\sigma, \tau ::= \alpha \mid \sigma \longrightarrow \tau \qquad (\alpha \in \mathcal{V})$$

Les règles d'inférence de type sont :

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ (\text{var}) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \longrightarrow \tau}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \longrightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}\ (\text{app})$$

On rappelle la définition de certains termes spéciaux :
$\mathsf{K} = \lambda x.\lambda y.x$ $\quad \mathsf{S} = \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz)$ $\quad \mathsf{I} = \lambda x.x$ $\quad \mathsf{T} = \lambda x.\lambda y.x$ $\quad \mathsf{F} = \lambda x.\lambda y.y$.

Exercice 1 : *Types simples*

1°) Typer I.
2°) Typer SKK (Conseil : commencer par typer K et S).
3°) Vérifier que $\mathsf{SKK} \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{I}$. Selon vous, que fait la β-réduction aux démonstrations ?
4°) Trouver un λ-terme de type B : $(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\gamma \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \gamma \longrightarrow \beta$.
5°) Typer $\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.x(yw)w(zw)$.

Exercice 2 : *Les entiers naturels en λ-calcul*

On souhaite encoder $\mathbb{N}$ et les opérations arithmétiques élémentaires en λ-calcul.
On pose par récurrence les entiers comme suit :

- $0 = \lambda s.\mathsf{I}$ (*i.e.* le combinateur F) ;
- si $\mathsf{n} \in \mathbb{N}$ a été défini, $\mathsf{n}+1$ est défini comme la forme normale de $\lambda s.\lambda z.s(\mathsf{n}sz)$.

1°) Écrire les valeurs de 1, 2 et 3. Quel combinateur représente n ?
2°) Définir des λ-termes représentant le successeur succ et les opération $+$ et $\times$.
3°) Définir un λ-terme Z tel que Zn représente le booléen « n=0 ».
4°) On pose $\mathsf{pred} = \lambda n.n(\lambda p.\lambda z.z(\mathsf{succ}(p\mathsf{T}))(p\mathsf{T}))(\lambda z.z00)\mathsf{F}$.
Montrer que $\mathsf{pred}(\mathsf{n}+1) \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{n}$. Que vaut $\mathsf{pred}\,0$?
5°) Définir un λ-terme représentant l'opération $-$.

Rappels de cours : ***Logique combinatoire***

Les termes de la logique combinatoire, ou CL-termes, sont définis par la grammaire algébrique suivante :

$$M, N ::= x \mid MN \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \qquad \text{où } x \in \mathcal{U} \text{ est une variable.}$$

Il y a donc des variables, deux constantes **S** et **K**, et une opération binaire, l'application.

Sur les CL-termes, on définit comme suit la CL-réduction $\xrightarrow{\text{CL}}$:

$$\mathbf{S}xyz \xrightarrow{\text{CL}} xz(yz) \qquad \mathbf{K}xy \xrightarrow{\text{CL}} x$$

On note **I** le terme **SKK**. On remarque que $\mathbf{I}x \overset{\text{CL}}{\twoheadrightarrow} x$.

On interprète les CL-termes vers les λ-termes et vice-versa par :

$$\begin{array}{rcl} [\![MN]\!]_\lambda & = & [\![M]\!]_\lambda [\![N]\!]_\lambda \\ [\![x]\!]_\lambda & = & x \\ [\![\mathbf{K}]\!]_\lambda & = & \lambda xy.x \\ [\![\mathbf{S}]\!]_\lambda & = & \lambda xyz.xz(yz) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [\![MN]\!]_{\text{CL}} & = & [\![M]\!]_{\text{CL}} [\![N]\!]_{\text{CL}} \\ [\![x]\!]_{\text{CL}} & = & x \\ [\![\lambda x.M]\!]_{\text{CL}} & = & [x].[\![M]\!]_{\text{CL}} \end{array}$$

où $[x].$ est un opérateur d'abstraction défini par : $[x].M = \mathbf{K}M$ si x n'est pas une variable de M et, sinon, $[x].(MN) = \mathbf{S}([x].M)([x].N)$ et $[x].x = \mathbf{I}$.

Exercice 3 : ***Logique combinatoire***

1°) Montrer que **SK** est en forme CL-normale et que $[\![\mathbf{SK}]\!]_\lambda$ n'est pas en forme β-normale.
2°) Montrer que $\mathsf{SK} =_\beta \mathsf{KI}$ et que $\mathbf{SK} \neq_{\text{CL}} \mathbf{KI}$.
3°) Soient $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{SII}$ et $\mathbf{P} = \mathbf{S}(\mathbf{K}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{K}\boldsymbol{\omega})$. Montrer que $\mathbf{P}$ est en forme CL-normale, et que $[\![\mathbf{P}]\!]_\lambda$ n'a pas de forme β-normale.
4°) On a en λ-calcul la réduction suivante : $\lambda x.\mathsf{I}x \xrightarrow{\beta} \mathsf{I}$. Montrer qu'il est impossible que $[\![\lambda x.\mathsf{I}x]\!]_{\text{CL}} \overset{\text{CL}}{\twoheadrightarrow} [\![\mathsf{I}]\!]_{\text{CL}}$.
5°) Comparer le graphe de Ω selon la β-réduction avec le graphe de $[\![\Omega]\!]_{\text{CL}}$ selon la CL-réduction.