**E. Bouscaren**

# Théorie des ensembles (Notes 7)

Suite : Les ordinaux et les ensembles bien ordonnés - L'axiome du choix
(On continue la numérotation en suivant celle des notes n° 6)

## 2 Ensembles bien ordonnés, ordinaux

Nous reprenons ici le début de la deuxième section des notes 6.

### 2.1 Les ordinaux

On appellera **relation d'ordre strict** une relation $R$ transitive et telle que pour tout $x$ on n'a jamais $xRx$.

On suppose que $\mathcal{U} \models ZF^-$.

**Définition**: 1. Soit $a$ un ensemble et $r \subset a \times a$. On dit que $r$ est une relation de **bon ordre** sur $a$, ou que $(a, r)$ est bien ordonné, si $r$ est une relation d'ordre sur $a$ et $r$ est un bon ordre, c'est-à-dire, tout sous-ensemble non vide de $a$ possède un plus petit élément.
2. $s \subset a$ est un **segment initial** pour $r$ si pour tous $x, y \in a$, si $x \in s$ et $(y, x) \in r$, alors $y \in s$. Si $b \in a$, alors l'ensemble $S_b(a, r) = \{x \in a; (, b) \in r \wedge x \neq b\}$ est un segment initial de $a$.

**Remarque**: Si $r$ est un bon ordre sur $a$, , alors $r$ est un ordre total sur $a$ (pour $x, y \in a$, le sous-ensemble $\{x, y\}$ doit avoir un plus petit élément).

On considère un ensemble $a$ muni d'un bon ordre, qu'on note $\leq$.

**Lemme 2.1** *$s \subset a$ est un segment initial pour $(a, \leq)$ si et seulement si $s = a$ ou bien $s = S_b(a, \leq)$ pour un $b \in a$.*

**Définition**: Un ensemble $a$ est un **ordinal** si
(1) $\in$ est une relation d'ordre strict sur $a$
(2) $(a, \in)$ est bien ordonné
(3) $a$ est un ensemble *transitif* c'est-à-dire tel que $\mathcal{U} \models \forall x\, (x \in a \ \rightarrow\ x \subset a)$.

**Lemme 2.2** *Les ensembles de $\mathcal{U}$ qui sont des ordinaux forment une collection définissable. On notera $On(v)$ la formule qui la définit, et $On$ la collection elle-même.*

Exemples: les ensembles suivants sont des ordinaux: $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{0, 1\}$, ....., $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ...

**Lemme 2.3** *Soit $\alpha$ un ordinal.*

1. $\alpha \notin \alpha$
2. *Si $b \in \alpha$, $b$ est un ordinal*
3. *$s \subset a$ est un segment initial pour $(\alpha, \in)$ si et seulement si $s = \alpha$ ou bien $s \in \alpha$.*

**Proposition 2.4** *Soient $\alpha, \beta$ des ordinaux. Alors un et un seul des trois cas suivants est posssible: $\alpha = \beta$ ou bien $\alpha \in \beta$ ou bien $\beta \in \alpha$.*

**Proposition 2.5** *La relation $\in$ est une relation d'ordre strict sur la collection des ordinaux. C'est une relation de bon ordre au sens suivant: pour toute formule $\phi(v, w_1, \ldots, w_k)$ de $\mathcal{L}_\in$, pour tous $a_1, \ldots, a_k$ ensembles, si la sous-collection de $On$, $\{x; \mathcal{U} \models On(x) \wedge \phi(x, a_1, \ldots, a_k)\}$ n'est pas vide, alors elle a un plus petit élément.*

**Corollaire 2.6** *La collection $On$ n'est pas un ensemble*

**Proposition 2.7** (Laissée en exercice) *Si $c$ est un ensemble dont tous les éléments sont des ordinaux, alors $c$ a une borne supérieure égale à $\bigcup_{\alpha \in c} \alpha$.*

**Lemme 2.8** *Soit $\alpha$ un ordinal. Le plus petit ordinal strictement supérieur à $\alpha$ est $\alpha \cup \{\alpha\}$, qu'on appelle l'ordinal successeur de $\alpha$, et qu'on notera $\alpha + 1$.*

**Définition**: Un ordinal $\beta$ est un **ordinal successeur** s'il existe un ordinal $\alpha$ tel que $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. On dit alors que $\alpha$ est l'ordinal précesseur de $\beta$.

– Un ordinal différent de 0 qui n'est pas un ordinal successeur est appelé un **ordinal limite**.

– Un ordinal $\beta$ est **fini** si, pour tout $\alpha \leq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\alpha$ est successeur. Un ordinal qui n'est pas fini est **infini**.

**Remarques:** Si $\beta$ est fini, alors $\beta = 0$ ou $\beta$ est successeur.

– Si $\beta$ est fini, alors tout $\alpha \leq \beta$ est aussi fini, $\beta + 1$ est aussi fini.
– Si $\beta$ est infini, alors tout $\alpha \geq \beta$ est infini.
– Si $\beta$ est limite alors $\beta$ est infini.
– Il existe un formule $fin(v)$ de $\mathcal{L}_\epsilon$ telle que pour tout ensemble $a$,

$$\mathcal{U} \models fin(a) \text{ ssi } a \text{ est un ordinal fini.}$$

**Proposition 2.9** *Soit $\mathcal{U}$ un modèle de $ZF^-$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *$\mathcal{U}$ est un modèle de l'axiome de l'infini (= AI), c'est-à-dire*
   $\mathcal{U} \models \exists y\, (\emptyset \in y \wedge \forall x\, (x \in y \rightarrow x \cup \{x\} \in y))$.
2. *Il existe un ordinal infini dans $\mathcal{U}$.*
3. *Il existe un ordinal limite dans $\mathcal{U}$.*
4. *La collection définissable des ordinaux finis de $\mathcal{U}$ est un ensemble dans $\mathcal{U}$.*

On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{U}$ est modèle de $ZF$, c'est-à-dire de $ZF + AI$.
Il existe donc un ensemble dont les éléments sont exactement tous les ordinaux finis de $\mathcal{U}$. On appelle cet ensemble $\omega$. Il est évident que $\omega$ est un ordinal limite, en fait c'est le plus petit ordinal infini et le plus petit ordinal limite.
L'ordinal successeur de $\omega$, $\omega + 1$ est infini mais n'est pas limite, de même pour tous les $\omega + n$, ($n^{ieme}$ successeur de $\omega$).

## 2.2 Quelques remarques sur les ordinaux finis non-standards

**(1).** Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux modèles de ZF tels que $\mathcal{U}_1$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{U}_2$.

Soit $\alpha$ dans $\mathcal{U}_1$, alors $\alpha$ est un ordinal dans $\mathcal{U}_1$ si et seulement si $\alpha$ est un ordinal dans $\mathcal{U}_2$, puisque il existe une formule $On(v)$ telle que $\mathcal{U}_1 \models On(\alpha)$ ssi $\alpha$ est un ordinal.

De même, $\alpha$ est un ordinal fini dans $\mathcal{U}_1$ si et seulement si $\alpha$ est un ordinal fini dans $\mathcal{U}_2$.

En particulier $\omega$, le plus petit ordinal infini de $\mathcal{U}_1$, est toujours le plus petit ordinal infini de $\mathcal{U}_2$.

**(2)** Soit $\mathcal{U}_1$ un modèle de ZF. On rajoute un nouveau symbole de constante $d$, au langage $\mathcal{L}_\in$. On considère l'ensemble de formules suivantes :

$$\Gamma = \{d \in \omega\} \cup \{n \in d;\ \text{pour chaque entier n dans } \mathbb{N}\}$$

(on rappelle que on a défini $0 = \emptyset$, et ensuite $n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$).

Alors $Diag_{el}(\mathcal{U}_1) \cup \Gamma$ est consistant, car finiment réalisé dans $\mathcal{U}_1$.
Soit donc $\mathcal{U}_2$ un modèle de $Diag_{el}(\mathcal{U}_1) \cup \Gamma$, $\mathcal{U}_2$ est une extension élémentaire de $\mathcal{U}_1$.
Soit $\gamma$ l'interprétation de la constante $d$ dans $\mathcal{U}_2$. Alors $\gamma$ est un ordinal fini: en effet, dans $\mathcal{U}_2$, $\gamma$ est un élément de l'ordinal $\omega$, c'est donc bien un ordinal lui-même. De plus, tout élément de $\omega$ est fini dans $\mathcal{U}_2$, puisque cela est vrai dans $\mathcal{U}_1$ et se dit par une formule.

On dit qu'un ordinal $\gamma$ est fini non standard si $\gamma$ est fini mais différent de $n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans $\mathcal{U}_2$, il n'y a pas de plus petit ordinal fini non-standard: si $\gamma$ est non-standard, alors $\mathcal{U}_2 \models \exists v(v \in \omega \wedge \gamma = v \cup \{v\})$, car $\mathcal{U}_2 \models \forall v(v \in \omega \wedge v \neq 0) \rightarrow (\exists w\, v = w \cup \{w\})$. Et bien sûr, un non-standard ne peut être le successeur d'un standard.

Donc la sous-partie de $\omega$ formée des ordinaux finis non-standard est non-vide mais n'a pas de plus petit élément. Cela ne contredit pas le fait que, dans $\mathcal{U}_2$, $(\omega, \in)$ est un ensemble bien ordonné: en effet un ensemble $a$ est bien ordonné si tout *sous-ensemble* non-vide de $a$ a un plus petit élément. Or les non-standards dans $\omega$ ne forment pas un ensemble (et les standards non plus). En particulier, on peut fabriquer une suite formée d'éléments de $\omega$ non- standards $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1}$.... indexée par $\mathbb{N}$, mais on n'a pas de telle suite qui est un élément de $\mathcal{U}_2$, en particulier, on n'a pas de suite $(a_i)_{i\in\omega}$ dans $\mathcal{U}_2$ (i.e. une application dans $\mathcal{U}_2$ de domaine $\omega$ et d'image un sous-ensemble de $\omega$) telle que si $i < j$ , alors $a_j \in a_i$, pour tous $i, j$ éléments de $\omega$ dans $\mathcal{U}_2$!

## 2.3 Les bons ordres

**Lemme 2.10** *Si $\alpha$ et $\beta$ sont des ordinaux, si $f : \alpha \mapsto \beta$ est une application strictement croissante, alors $\alpha \leq \beta$ et pour tout $x \in \alpha$, $x \leq f(x)$.*

**Lemme 2.11** *Si $\alpha$ et $\beta$ sont des ordinaux, si $f : \alpha \mapsto \beta$ est un isomorphisme pour l'ordre, alors $\alpha = \beta$ et $f$ est l'identité.*

**Proposition 2.12** *Pour tout ensemble bien ordonné $(a, \leq_a)$ , il existe un unique ordinal $\alpha$ et une unique bijection $f$ de $a$ dans $\alpha$ qui est un isomorphisme pour l'ordre, c'est-à-dire,* *telle que pour tous $x, y \in a$, $x \leq_a y$ ssi $f(x) \leq f(y)$. On dit alors que $(a, \leq_a)$ est de* **type d'ordre** *$\alpha$.*

## 2.4 Opérations sur les ordinaux

- **La somme ordinale**: Soient $\alpha$, $\beta$ deux ordinaux. On définit $\alpha+\beta$ comme l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble (bien ordonné): $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$, muni de l'ordre lexicographique.

- **Le produit ordinal**: Soient $\alpha$, $\beta$ deux ordinaux. On définit $\alpha\beta$ comme l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble (bien ordonné): $\beta \times \alpha$, muni de l'ordre lexicographique.

On remarque que la défintion de $+$ est bien cohérente avec la notation que l'on a introduite précédemment pour l'ordinal successeur de $\alpha$, $\alpha + 1$.

**Lemme 2.13** (Exercice) *i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$*
*ii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma)$*
*iii) $\alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$*
*iv) Si $\alpha$ et $\beta$ sont finis, $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont finis.*

**Attention** La somme et le produit ordinaux ne sont pas commutatifs. En particulier

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$

$$2\omega = (1 + 1)\omega = \omega < \omega 2 = \omega(1 + 1) = \omega + \omega.$$

## 2.5 Induction transfinie

### 2.5.1 Les entiers de $\mathcal{U}$

On appelle les ordinaux finis de $\mathcal{U}$, les entiers de $\mathcal{U}$. On peut montrer que sur les ordinaux finis, la somme et le produit sont commutatifs et que $< \omega, +, ., 0, succ >$ est un modèle de l'arithmétique de Peano.

On a facilement le principe d'induction suivant: soient $\phi(v, y_1, \ldots, y_n)$ une formule de $\mathcal{L}_\epsilon$ et $a_1, \ldots, a_n$ des ensembles. Si
$\mathcal{U} \models \phi(0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathcal{U} \models \forall x\, (x \in \omega \wedge \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \phi((x + 1), a_1, \ldots, a_n))$
alors
$\mathcal{U} \models \forall x\, (x \in \omega \rightarrow \phi(x, a_1, \ldots, a_n))$.

### 2.5.2 Induction sur les ordinaux

Soient $\phi(v, y_1, \ldots, y_n)$ une formule de $\mathcal{L}_\epsilon$ et $a_1, \ldots, a_n$ des ensembles. Si, pour tout ordinal $\alpha$,
$\mathcal{U} \models (\forall x\, (x < \alpha \rightarrow \phi(x, a_1, \ldots, a_n)) \rightarrow (\phi(\alpha, a_1, \ldots, a_n))$
alors
$\mathcal{U} \models \forall y\, (On(y) \rightarrow \phi(y, a_1, \ldots, a_n))$.
Remarque: l'hypothèse implique que $\mathcal{U} \models \phi(0)$.

### 2.5.3 Définition d'une relation fonctionnelle par induction sur les ordinaux

Rappel: Une relation fonctionnelle $F$ de domaine une sous-collection $C$ définissable de $\mathcal{U}$ est une formule $F(x, y)$ qui est telle que $\mathcal{U} \models \forall x(C(x) \rightarrow \exists y(F(x, y) \ \wedge \ \forall z \ F(x, z) \rightarrow z = y))$. On écrit alors $F(x) = y$ au lieu de $F(x, y)$. Si $a$ est un ensemble dont tous les éléments sont dans la collection $C$, alors $F_{\lceil a}$ est une application de domaine $a$.

Si $\alpha$ est un ordinal, on note $App_\alpha$ la collection des applications de domaine un ordinal inférieur à $\alpha$, c'est-à-dire

$$f \text{ est dans } App_\alpha \text{ ssi } \mathcal{U} \models \exists \ \beta \ (\beta < \alpha \ \wedge \ \exists x \ (f \in x^\beta)).$$

On note $App_{On}$ la collection des applications dont le domaine est un ordinal:

$$f \text{ est dans } App_{On} \text{ ssi } \mathcal{U} \models \exists \ \beta \ (On(\beta) \ \wedge \ \exists x \ (f \in x^\beta)).$$

**Proposition 2.14** (énoncée en cours mais non démontrée) *Soit $G$ une relation fonctionnelle définie de la collection $App_{On}$ dans $\mathcal{U}$. Alors il existe une (unique) relation fonctionnelle $F$ définie sur la collection des ordinaux, telle que, pour tout ordinal $\alpha$, $F(\alpha) = G(F_{\lceil \alpha})$.*

On dit alors que la fonction $F$ est **définie par induction sur les ordinaux** , ou par **induction transfinie**.

On commence par montrer:

**Lemme 2.15** *Soit $G$ une relation fonctionnelle définie sur $App_\alpha$. Alors il existe une unique application $f$ de domaine $\alpha$ qui satisfait, pour tout $\beta < \alpha$, $f(\beta) = G(f_{\lceil \beta})$.*

*Preuve du lemme*: Commençons par montrer l'unicité. Soient $f$ et $g$ deux applications de domaine $\alpha$ satisfaisant la condition pour tout $\beta < \alpha$, $f(\beta) = G(f_{\lceil \beta})$ et $g(\beta) = G(g_{\lceil \beta})$. On a en particulier $f(0) = g(0) = G(\emptyset)$. Soit $\beta$, le plus petit ordinal tel que $f(\beta) \neq g(\beta)$, s'il existe. Alors $f(\gamma) = g(\gamma)$ pour tout $\gamma < \beta$, c'est-à-dire, $f_{\lceil \beta} = g_{\lceil \beta}$. Donc $G(f_{\lceil \beta}) = G(g_{\lceil \beta})$, et $f(\beta) = g(\beta)$.

Montrons maintenant l'existence. Soit $c$ l'ensemble des $\beta < \alpha$ pour lesquels il existe une application $f_\beta$, définie sur $\beta$, telle que, pour tout $\gamma < \beta$, $f_\beta(\gamma) = G(f_{\beta_{\lceil \gamma}})$. On voit facilement que $c$ est un segment initial de $\alpha$ et par l'unicité montrée au-dessus, si $\gamma < \beta$, alors $f_\gamma = f_{\beta_{\lceil \gamma}}$. L'ensemble $c$ est un segment initial de $\alpha$, donc c'est lui-même un ordinal inférieur ou égal à $\alpha$.

On définit une application $f_c$, de domaine $c$, en posant, pour chaque $\beta < c$, $f_c(\beta) = G(f_\beta)$. L'application $f_c$ vérifie bien la condition que pour tout $\beta < c$, $f_c(\beta) = G(f_{c_{\lceil \beta}})$. Si $c < \alpha$, alors par définition de $c$, $c \in c$, ce qui est impossible pour un ordinal, donc $c = \alpha$ et $f_\alpha$ est l'application cherchée.

*Preuve de la proposition 2.14*: On pose $F(\alpha) = y$ ssi "il existe une application $f_\alpha$ de domaine $\alpha$, telle que, pour tout $\beta < \alpha$, $f_\alpha(\beta) = G(f_{\alpha_{\lceil \beta}})$ et $y = G(f_\alpha)$".

Par le lemme précédent, $G$ est bien définie sur tous les ordinaux et est une relation fonctionnelle.

Si $\beta < \alpha$, $f_\beta = f_{\alpha_{\lceil \beta}}$, donc

$$F(\beta) = G(f_\beta) = G(f_{\alpha_{\lceil \beta}}) = f_\alpha(\beta).$$

Et il est facile de vérifier que la fonction ainsi définie a les propriétés requises et est unique.

### 2.5.4 Exemple d' application, l'univers bien fondé

Rappellons que l'**axiome de fondation** $AF$ dit:

$$\forall x\ (x \neq \emptyset \ \rightarrow\ \exists y (y \in x \wedge : y \cap x = \emptyset)).$$

Cet axiome implique que la relation d'appartenance sur l'univers $\mathcal{U}$ est "bien fondée": il n'existe pas de suite infinie $(u_n)_{n\in\omega}$ telle que $u_{n+1} \in u_n$ pour tout $n$. Il implique aussi en particulier que pour tout $x$, $x \notin x$ (exercice).

Dans $\mathcal{U}$, on définit par induction sur les ordinaux une fonction des ordinaux dans $\mathcal{U}$. À $\alpha$ ordinal, on va associer un ensemble $V_\alpha$:

On pose $V_0 = \emptyset$, et pour $\alpha > 0$, $V_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{P}(V_\alpha)$. Il s'agit bien d'une définition par induction. En effet, on considère la fonction définissable $G$ de la collection des applications définies sur un ordinal dans $\mathcal{U}$ : $G(f) = y$ ssi $y = \cup_{\beta<dom(f)}\mathcal{P}(f(\beta))$. Alors, on sait qu'il existe une unique fonction $F$ définie sur les ordinaux, telle que pour tout ordinal $\alpha$, $F(\alpha) = G(F_{\lceil\alpha})$. On a bien $V_\alpha = F(\alpha)$.
On remarque que $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ et que si $\beta$ est un ordinal limite, alors $V_\beta = \cup_{\delta<\beta}V_\delta$.

Maintenant considérons la collection définissable $V$ telle que $\mathcal{U} \models \forall x\ V(x) \leftrightarrow \exists\alpha(On(\alpha)\wedge x \in V_\alpha)$.

On peut alors montrer:

**Théorème 2.16** *Si $\mathcal{U}$ est un modèle de $ZF$, $\mathcal{U} \models AF$ si et seulement si $\mathcal{U} \models \forall x V(x)$.*

# 3 Retour sur l'axiome du choix

Soit $\mathcal{U}$ un modèle de $ZF$

On rappelle que l'axiome du choix, (AC) dit :

Pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'ensembles non-vides, le produit
$\Pi_{i\in I}a_i = \{f \in (\bigcup_{i\in I} a_i)^I\ ;\forall i\ i \in I\ \rightarrow f(i) \in a_i\}$ est non-vide.

On a facilement les premières équivalences suivantes:

**Lemme 3.1** (exercice) *(i) $\mathcal{U} \models AC$,*
*ssi*
*(ii) pour tout ensemble non vide $a$, il existe une application $g$ de $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ dans $a$ telle que pour tout $x \subset a$ non vide, $g(x) \in x$. Une telle application est appellée une fonction de choix sur $a$,*
*ssi*
*(iii) pour chaque ensemble $a$ dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble $b$ dont l'intersection avec chacun des éléments de $a$ est un singleton.*

Le théorème suivant est un peu plus difficile. On a montré en cours l'équivalence entre (1) et (2), qui utilise une fonction définie par induction sur les ordinaux.

**Proposition 3.2** *Les énoncés suivants sont équivalents:*

*(1)* $\mathcal{U} \models AC$

*(2)* $\mathcal{U}$ *satisfait le théorème de Zermelo: tout ensemble* $a$ *de* $\mathcal{U}$ *peut être muni d'un bon ordre*

*(3)* $\mathcal{U}$ *satisfait le lemme de Zorn: si* $a$ *est un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble totalement ordonné a un majorant, alors* $a$ *admet un élément maximal.*