# TD 1 : quelques corrections et indications

04/10/03

**4. Cantor-Bernstein.**

1 Soient $n$ et $p$ deux entiers distincts (par exemple, $n < p$). Supposons $A_n \cap A_p \neq \emptyset$, et soit $y$ un 'elément de cette intersection.
Comme $A_n = f^n(A_0)$, l'élément $y$ s'écrit $y = f^n(x)$, avec $x$ un élément de $A_0 = X \setminus Y$. D'autre part $A_p = f^n(A_{p-n})$ donc on peut écrire $y = f^n(x')$, avec $x'$ un élément de $A_{p-n}$. Mais $A_{p-n} = f(A_{p-n-1})$, en particulier $A_{p-n}$ est inclus dans l'image de $f$, donc dans Y, et donc $x' \in Y$.
$y$ est ainsi l'image par $f^n$ de deux éléments $x$ et $x'$ distincts ($x \in X \setminus Y$ et $x' \in Y$), ce qui montre que $f^n$ n'est pas injective et contredit l'injectivité de $f$. Donc $A_n \cap A_p = \emptyset$.
**N.B.** Ceci ne sert pas vraiment à la suite...

2 Par définition, pour tout $n$, $A_{n+1}$ est l'image de $A_n$ par la fonction $f$ injective, c'est-à-dire que $f$ réalise une bijection de $A_n$ sur $A_{n+1}$. les ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux à deux disjoints, on peut passer à l'union et en déduire que $f$ réalise une bijection de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
(Sans le résultat de la question précédente, il faudrait préciser ce passage. Ceci ne pose aucune vraie difficulté, le seul risque étant dans ce type de situation que la fonction définie sur l'union ne soit pas injective, mais ici cette propriété découle de l'énoncé...)

3 On construit alors une bijection $g$ de X sur Y en posant $g(x) = f(x)$ si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $g(x) = x$ sinon.
Le plus simple pour montrer que $g$ est injective est de le faire à la main, en distinguant les différents cas possibles. Ainsi, si l'on prend un élément $y \in Y$, alors soit $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ auquel cas $y$ admet un unique antécédent par $f$ dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et bien sûr aucun andécédent par $g$ dans $Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, soit au total un unique antécédent par $g$. Si $y \in Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, c'est la situation inverse. La surjectivité est encore plus immédiate.

4 Soient A et B deux ensembles,$f_1$ une injection de A dans B et $f_2$ une injection de B dans A.
On pose $X = A$ et $Y = f_2(B) \subset A$. On pose enfin $f = f_2 \circ f_1$. $f$ est la composée de deux injections, c'est donc également une injection, de $A = X$ dans $f_2(B) = Y$.

Par la question précédente, on a donc une bijection $g$ de X sur Y. Enfin, $f_2$ réalise une bijection de B sur $f_2(\mathrm{B})$, soit $h$ sa bijection réciproque. La fonction $h \circ g$ répond à notre problème, c'est par construction une bijection de A sur B.

**5. Cardinal des réels.**

1 Pour montrer que la fonction $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n}$ est injective, il suffit de prendre deux suites distinctes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et de considérer le plus petit entier $n_0$ tel que $\varepsilon_{n_0} \neq \varepsilon'_{n_0}$ (par exemple $\varepsilon_{n_0} = 0$ et $\varepsilon'_{n_0} = 1$). On majore ensuite le reste de la série par :

$$\sum_{n\geq n_0} \frac{\varepsilon_n}{3^n} \leq \sum_{n>n_0} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n_0}}$$

et donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\varepsilon_n}{3^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n_0}}$$

Comme d'autre part
$$\sum_{n\geq n_0} \frac{\varepsilon'_n}{3^n} \geq \frac{\varepsilon'_{n_0}}{3^{n_0}} = \frac{1}{3^{n_0}}$$

on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon'_n}{3^n} \geq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\varepsilon'_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0}} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\varepsilon_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0}}$$

Puisque les deux suites coïncident jusqu'au rang $n_0 - 1$ par définition de $n_0$. En particulier, ces deux sommes sont distinctes, et la fonction est injective.

2 $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, donc dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, isomorphe à $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}$ s'injecte de manière canonique dans $\mathbb{Q}$, on obtient une bijection $f$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ par Cantor-Bernstein. $f$ induit naturellement une bijection $\tilde{f}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ par
$$\tilde{f}(\mathrm{X}) = \{f(x), \quad x \in \mathrm{X}\}$$

3 Tout réel est limite d'une suite de rationnels. On peut donc construire une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ de cette façon-là (modulo l'axiome du choix. . . ), et donc dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en composant par la réciproque de la bijection de la question précédente.