TD 10 : corrections et indications

12/12/03

1. Fonctions

2 Supposons démontré le caractère primitif récursif des fonctions α_2, β_2^1 et β_2^2, où α_2 est la bijection "diagonale" de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, et β_2^1 et β_2^2 sont les fonctions telles que pour tout couple (n,p), on ait $\beta_2^1(\alpha_2(n,p)) = n$ et $\beta_2^2(\alpha_2(n,p)) = p$. alors la fonction $g(n) = \alpha_2\left(f(n), f(n+1)\right)$ est défini par récurrence par :

$$\begin{cases} g(0) = \alpha_2(1,1) = 4 \\ g(n+1) = \alpha_2\left(\beta_2^2\left(g(n)\right), \beta_2^1\left(g(n)\right) + \beta_2^2\left(g(n)\right)\right) \text{ pour tout } n \end{cases}$$

La fonction g est donc primitive récursive, ainsi que $f = \beta_2^1 \circ g$.

On vérifie que la fonction α_2 s'écrit $\alpha_2(n,p) = \dfrac{(n+p)(n+p+1)}{2} + p$, et donc qu'elle est récursive primitive.

Les fonctions β_2^1 et β_2^2 s'expriment quant à elles respectivement par les formules :

$$\beta_2^1(n) = \mu m \leq n\,(\exists p \leq n \alpha_2(m,p) = n)$$

$$\beta_2^2(n) = \mu p \leq n\,(\exists m \leq n \alpha_2(m,p) = n)$$

Reste à montrer que l'ensemble des fonctions primitives récursives est clos par les deux opérations effectuées pour définir ces fonctions. Soit $f(n,m,p)$ la fonction (récursive primitive) définie par l'expression $sg\left(\alpha_2(m,p) - n\right) + sg\left(n - \alpha(m,p)\right)$.

- La fonction indicatrice de l'événement $\exists p \leq n, f(n,m,p) = 0$ est encore primitive récursive (en les variables n et m).
  En effet la fonction $\chi_{f(n,m,p)=0} = 1 - sg\left(f(n,m,p)\right)$ est encore primitive récursive
  La fonction $g(n,m,k) = \sum_{p=0}^{k} \chi_{f(n,m,p)=0}$ est donc elle aussi primitive récursive : elle est définie par récurrence par

$$\begin{cases} g(n,m,0) = \chi_{f(n,m,0)=0} \\ g(n,m,k+1) = g(n,m,k) + \chi_{f(n,m,k+1)=0} \end{cases}$$

  La fonction indicatrice de l'événement $\exists p \leq n, f(n,m,p) = 0$ s'écrit alors $sg\left(g(n,m,n)\right)$, elle est donc primitive récursive car composée de fonctions primitives récursives.
  Par le même raisonnement, on obtient que la fonction indicatrice de l'événement $\exists m \leq k \exists p \leq n, f(n,m,p) = 0$ (fonction de k et n) est primitive récursive.

– La fonction $n \longmapsto \mu m \leq n\, (\exists p \leq n, f(n,m,p) = 0)$ est donc primitive récursive. En effet la fonction $h : (n,k) \longmapsto \mu m \leq k\, (\exists p \leq n, f(n,m,p) = 0)$ est primitive récursive, car se définit par récurrence par

$$\begin{cases} h(n,0) = \chi_{\exists p \leq n, f(n,0,p)=0} \\ h(n,k+1) = h(n,k)\chi_{\exists m \leq k \exists p \leq n, f(n,0,p)=0} + (k+1)\chi_{\exists p \leq n, f(n,k+1,p)=0} \end{cases}$$

– La fonction β_2^1 n'est rien d'autre que la fonction $n \mapsto h(n,n)$. Elle est donc primitive récursive.

N.B. Par des raisonnement identiques à ceux-ci, on obtient le résultat général suivant. Si f est primitive récursive, alors les fonctions :

$$(x_1, \ldots, x_p, y) \longmapsto \sum_{k=0}^{y} f(x_1, \ldots, x_p, k)$$

et donc $$(x_1, \ldots, x_p, y) \longmapsto \mu x \leq y f(x_1, \ldots, x_p, x) = 0$$

sont encore primitives récursives (la deuxième fonction vaut 0 s'il n'y a pas de $x \leq y$ tel que $f(x_1, \ldots, x_p, x) = 0$).

3 Attention : f doit être totale ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) pour que la fonction $(1 - sg(y - f(x)))(1 - sg(f(x) - y))$ soit totale, ce qui est nécessaire pour une fonction indicatrice...

4 C'est un exercice classique que de montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k! = \dfrac{p_n}{n!}$ et $u_n + 1/nn!$ sont adjacentes et tendent vers e. De ceci, on déduit l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} < n!(e - u_n) < \frac{1}{n}$$

Comme $n!u_n$ est un entier, on a donc pour tout entier p : $|n!e - p| > 1/(n+1)$ et donc $\left|e - \dfrac{p}{n!}\right| > \dfrac{1}{(n+1)!}$

Soit n un entier et $q = 10^n + 1$. On va montrer que la n-ième décimale de u_q est égale à la n-ième décimale de e.

Soir α_n la partie entière de $10^n u_q$. Alors $\alpha_n < 10^n e$. D'autre part, si $10^n e \geq \alpha_n + 1$ alors $10^n e - (\alpha_n + 1) \geq 0$ donc $e - (\alpha_n + 1)/10^n > 1/q!$ d'après ce qui précède ($(\alpha_n + 1)/10^n$ peut s'écrire sous la forme $p/10^n!$).

Or on sait que $e - u_q < \dfrac{1}{qq!} < \dfrac{1}{q!}$, on obtient donc $u_q > (\alpha_n + 1)/10^n$ ce qui contredit la définition de α_n.

Pour terminer, il reste à voir que la fonction qui à n fait correspondre la n-ième décimale de u_q est récursive primitive.

$n \mapsto q$ est récursive primitive. Et la fonction $(n,k) \longmapsto k$-ième décimale de u_n est elle aussi primitive récursive, car elle s'écrit :

$$n \longmapsto \mu p \leq 9 \left(\exists l \leq 10^k (10l + p) q! \leq 10^k p_q < 10^k (10l + p + 1) q!\right)$$

et la fonction $n \mapsto p_n$ est récursive primitive : $p_{n+1} = (n+1)p_n + 1$.