TD 10 : corrections et indications (suite)

2. Fonction β de Gödel

2 La fonction β est bien sûr primitive récursive. Elle est représentée par :

$$\mathrm{B}[v_0, v_1, v_2, v_3] = \exists v_4 \,(v_3 = v_4 \times s(v_2 \times sv_1) + v_0 \wedge v_0 < s(v_2 \times sv_1))$$

4 Soient g et h représentables, et $\mathrm{G}[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ (resp. $\mathrm{H}[v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}]$) une formule représentant g (resp. h). Soit f la fonction obtenu grâce au schéma de récurrence à partir de g et h, par :

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_k, 0) = g(x_1, \ldots, x_k) \\ f(x_1, \ldots, x_k, y+1) = h(x_1, \ldots, x_k, y, f(x_1, \ldots, x_k, y)) \end{cases}$$

Alors f est représentée par la formule $\mathrm{F}[v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}]$, à savoir :

$$\exists u_1 \exists u_2 \Big(\exists u_2 \,(\mathrm{B}[u_2, s0, u_1, u_2] \wedge \mathrm{G}[u_2, v_1, \ldots, v_k]) \wedge$$
$$\forall u_3 \leq v_{k+1} \exists u_4 \exists u_5 \,(\mathrm{B}[u_4, u_3, u_1, u_2] \wedge \mathrm{B}[u_5, s(u_3), u_1, u_2] \wedge \mathrm{H}[u_5, v_1, \ldots, v_k, u_3, u_4])$$
$$\wedge \mathrm{B}[v_0, s(v_{k+1}), u_1, u_2] \Big)$$

En effet, les variables u_1 et u_2 correspondent aux entiers a et b qui codent, via la fonction β de Gödel, la suite $(f(x_1, \ldots, x_k, 0), \ldots, f(x_1, \ldots, x_k, y))$. Ainsi, la première ligne de la formule exprime le fait que la valeur initiale de la suite codée est bien $g(x_1, \ldots, x_k)$, la deuxième le fait que chaque terme de la suite est l'image du précédent par la fonction h, et la troisième ligne "renvoie" le résultat, c'est-à-dire dit que v_0 est le dernier terme de la suite.

5 Aucun problème pour les projections, la fonction successeur ou encore les fonctions constantes. Si $\mathrm{F}_1[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ représente la fonction $f_1(x_1, \ldots, x_k)$ (resp. F_2 représente f_2, etc) et $\mathrm{G}[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ représente la fonction $g(x_1, \ldots, x_n)$, alors la fonction composée $g(f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_k))$ est représentée par la formule :

$$\exists u_1 \ldots \exists u_n \left(\mathrm{G}[v_0, u_1, \ldots, u_n] \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \mathrm{F}_i[u_i, v_1, \ldots, v_k] \right) \right)$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions représentable contient les projections, la fonction successeur et les fonctions constantes, est clos par composition et par schéma de récurrence, donc contient les fonctions primitives récusives.

6 Si f est une fonction totale de la forme $(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto \mu y \,((y, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{A})$, avec A représentée par la formule $\mathrm{F}[v_0, v_1, \ldots, v_k]$, alors f est représentée par la formule :

$$\mathrm{F}[v_0, v_1, \ldots, v_k] \wedge \forall u_0 < v_0 \neg \mathrm{F}[u_0, v_1, \ldots, v_k]$$

En corollaire, on obtient que toute fonction récursive totale est représentable.