# TD 13 : quelques corrections

18/01/04

**1. Une opération sur les ordinaux**

1 La seule chose à montrer est que, si $\beta \leq \alpha$, il existe un unique ordinal $\gamma$ tel que $\beta + \gamma = \alpha$.

Soient donc $\beta \leq \alpha$. On considère la classe des ordinaux $\gamma$ tels que $\beta + \gamma > \alpha$ (classe non vide, elle contient par exemple $\alpha + 1$...) Soit $\delta$ son plus petit élément.

Alors $\delta$ est un ordinal successeur. En effet, on aurait sinon $\delta$ limite, et alors $\beta + \delta = \sup\limits_{\gamma<\delta}(\beta + \gamma)$. Comme $\alpha < \beta + \delta$, on aurait alors un ordinal $\gamma < \delta$ tel que $\alpha \leq \beta + \gamma$, et alors $\alpha < \beta + (\gamma + 1)$, donc l'ordinal $\gamma + 1 < \delta$ contredirait la minimalité de $\delta$.

Donc $\delta$ s'écrit sous la forme $\gamma + 1$, et par définition de $\delta$ on a :

$$\beta + \gamma \leq \alpha < \beta + (\gamma + 1)$$

Comme $\beta+(\gamma+1) = (\beta+\gamma)+1$ est le successeur de $\beta+\gamma$, on a nécessairement $\alpha = \beta+\gamma$ (il n'y a a pas d'ordinal compris strictement entre un ordinsal et son successeur).

L'unicité découle de la régularité à droite.

**N.B.** Pour $\alpha = \omega+1$ et $\beta = \omega$ (premier ordinal limite), on ne peut pas trouver d'ordinal $\gamma$ tel que $\gamma + \beta = \alpha$. En effet, l'ordinal $\gamma + \beta$ sera un ordinal limite quel que soit $\gamma$, alors que $\alpha$est un ordinal successeur !

2 On considère la classe des ordinaux $\gamma$ tels que $\alpha < \beta\gamma$ (classe non vide, elle contient $\alpha + 1$). Soit $\delta$ son plus petit élément. Montrons que $\delta$ est un ordinal sucesseur.

Tout comme pour la somme ordinale, on montre les relations

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot 0 = 0 \\
&\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\
&\alpha \cdot \sup_{\gamma<\beta} \gamma = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha \cdot \gamma) \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.}
\end{aligned}$$

(pour définir l'injection de $\underset{x\in\beta}{\alpha} \cup \{x\}$, avec $\beta$ limite, dans l'ordinal $\sup\limits_{\gamma<\beta}(\alpha \cdot \gamma)$, on envoie un élément $(y, x)$ sur son image dans $\alpha \cdot (x + 1)$ par la bijection de $\underset{y\leq x}{\alpha} \cup \{y\}$ sur son ordinal $\alpha \cdot (x + 1)$.)

Ainsi $\delta$ est nécessairement un ordinal successeur : si $\delta$ est limite, alors on a $\alpha < \sup\limits_{\gamma<\delta}(\beta \cdot \gamma)$, donc il existe un ordinal $\gamma < \delta$ tel que $\alpha \leq \beta \cdot \gamma$, et alors $\gamma + 1 < \delta$ contredit la définition de $\delta$.

Si l'on écrit $\delta$ sous la forme $\gamma + 1$, on a alors $\beta \cdot \gamma \leq \alpha < \beta \cdot (\gamma + 1) = \beta \cdot \gamma + \beta$.

D'après la question précédente, il existe un unique $\delta$ tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$

De la monotonie à droite, on tire (comme $\beta \cdot \gamma + \delta < \beta \cdot \gamma + \beta$) que $\delta < \beta$).

Pour l'unicité enfin, l'ordinal $\gamma$ est nécessairement unique : si $\alpha$ s'écrit $\beta \cdot \gamma + \delta$ avec $\delta < \beta$, alors on a $\beta \cdot \gamma \leq \alpha < \beta \cdot (\gamma + 1)$, ce qui on l'a vu détermine $\gamma$, et donc $\delta$.

**2. Arithmétique cardinale**

3 Soit $\lambda$ le plus petit cardinal infini tel que l'ordre de Gödel soit, sur $\lambda \times \lambda$, isomorphe à un ordinal strictement supérieur à $\lambda$.

Soit $f$ l'isomorphisme de $\lambda \times \lambda$ muni de l'ordre de Gödel sur son ordinal $\lambda' > \lambda$.

Alors $f^{-1}(\lambda)$ est un segment initial de $\lambda \times \lambda$ muni de l'ordre de Gödel, qui est un bon ordre, donc est de la forme :

$$\{(\gamma, \delta) \in \lambda \times \lambda, (\gamma, \delta) <_{\mathrm{G}} (\alpha, \beta)\}$$

où $(\alpha, \beta)$ est un élément de $\lambda \times \lambda$.

Par définition de l'ordre de Gödel, cet ensemble est inclus dans :

$$\{(\gamma, \delta) \in \lambda \times \lambda, (\gamma, \delta) <_{\mathrm{G}} (\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \beta))\}$$

donc dans
$$(\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)$$

(où $+$ désigne ici la somme ordinale. On prend en fait le successeur pour avoir l'élément $\max(\alpha, \beta)$...)

Enfin $\lambda$ est un cardinal infini, c'est donc en particulier un ordinal limite. Comme $\alpha$ et $\beta$ sont des éléments de $\lambda$, il en va de même pour $\max(\alpha, \beta) + 1$, qui est donc strictement inférieur à $\lambda$.

- Si $\max(\alpha, \beta) + 1$ est un ordinal fini, on a immédiatement une contradiction : $f^{-1}$ induit une injection de l'ordinal infini $\lambda$ dans un ordinal fini.
- Sinon, si l'on appelle $\kappa$ le cardinal (infini) de $\max(\alpha, \beta) + 1$, alors on a une bijection naturelle de $(\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)$ dans $\kappa \times \kappa$, et donc en composant une injection de $\lambda$ dans $\kappa \times \kappa$.

  Par définition, $\lambda$ est le plus petit cardinal infini tel que l'ordre de Gödel soit, sur $\lambda \times \lambda$, isomorphe à un ordinal strictement supérieur à $\lambda$. Donc l'ordre de Gödel sur $\kappa \times \kappa$ est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à $\kappa$ (donc égal à $\kappa$, sinon on en déduirait une injection de $\kappa$ dans un ordinal plus petit, ce qui est absurde pour un cardinal). Mais alors, on a une injection de $\kappa \times \kappa$ dans $\kappa$, et donc en composant ces applications une injection de $\lambda$, cardinal infini, dans $\kappa$, cardinal infini strictement inférieur, ce qui est absurde.

Pour tout cardinal infini $\lambda$, l'ordre de Gödel sur $\lambda \times \lambda$ est donc isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à $\lambda$ (donc égal...).

4 Soit $\lambda$ un cardinal infini.

On a une injection naturelle de $\lambda$ dans $\lambda \dot{\cup} \lambda$ donc $\lambda \leq \lambda + \lambda$. On construit aisément une injection de $\lambda \dot{\cup} \lambda$ dans $\lambda \times \lambda$, donc on a aussi $\lambda + \lambda \leq \lambda \cdot \lambda$. Enfin, on vient d'exhiber une injection de $\lambda \times \lambda$ dans $\lambda$, donc $\lambda \cdot \lambda \leq \lambda$.

On a
$$\lambda \leq \lambda + \lambda \leq \lambda \cdot \lambda \leq \lambda$$
donc
$$\lambda = \lambda + \lambda = \lambda \cdot \lambda$$

5 Soit $\kappa$ un cardinal et $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ une famille de cardinaux non nuls. On suppose $\kappa$ infini ou l'un des $\lambda_\alpha$ infini. Alors on a une injection naturelle de $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \kappa}} \lambda_\alpha$ dans $\kappa \times \sup\limits_{\alpha \in \kappa} \lambda_\alpha$, et donc dans $\kappa' \times \kappa'$, où $\kappa' = \sup\left(\kappa, \sup\limits_{\alpha \in \kappa}(\lambda_\alpha)\right)$. D'après la question 3, $\kappa'$ est un cardinal infini donc $\kappa' \times \kappa'$ s'injecte dans $\kappa'$. Par composition, on obtient ainsi une injection de $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \kappa}} \lambda_\alpha$ dans$\kappa'$, et donc en passant au cardinal $\sum\limits_{\alpha \in \kappa} \lambda_\alpha \leq \kappa'$.

Inversement, $\kappa$ s'injecte naturellement dans $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \kappa}} \lambda_\alpha$ (les $\lambda_\alpha$ sont non nuls), et donc $\kappa \leq \sum\limits_{\alpha \in \kappa} \lambda_\alpha$. De même, on peut construire une injection de $\sup\limits_{\alpha \in \kappa}(\lambda_\alpha)$ dans $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \kappa}} \lambda_\alpha$ (on envoie un élément dans le premier $\lambda_\alpha$ auquel il appartient…), et donc $\sup\limits_{\alpha \in \kappa}(\lambda_\alpha) \leq \sum\limits_{\alpha \in \kappa} \lambda_\alpha$. Il vient $\kappa' \leq \sum\limits_{\alpha \in \kappa} \lambda_\alpha$.