TD 2 : quelques corrections et indications

11/10/03

1. Ensemble des formules

On montre par récurrence sur n la propriété $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.

- Au rang 0 : on a $\mathcal{F}_0 = \mathrm{P}$, et par hypothèse $\mathcal{F}$ contient P.
- supposons la propriété établie au rang n. Soit alors F une formule appartenant à $\mathcal{F}_{n+1}$. Trois cas se présentent :
  - Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_n$, auquel cas $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ par hypothèse de récurrence.
  - Soit F est de la forme $\neg\mathrm{G}$, avec $\mathrm{G} \in \mathcal{F}_n$. Alors $\mathrm{G} \in \mathcal{F}$ par hypothèse de récurrence, et comme la négation d'une formule est encore une formule par définition de $\mathcal{F}$, on a encore $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$.
  - Sinon, F est de la forme $(\mathrm{G}\varepsilon\mathrm{H})$ avec G et H dans $\mathcal{F}_n$ et $\varepsilon = \wedge, \vee, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Encore une fois, on a G et H dans $\mathcal{F}$ d'après l'hypothèse de récurrence, et donc en utilisant le troisième point de la définition de $\mathcal{F}$: $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$.

  Dans tous les cas, on a donc $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. On a montré $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.
- On conclut par le principe de récurrence que pour tout n, on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.

On obtient
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$$

Enfin, il est clair que l'ensemble de mots $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ vérifie les trois conditions de la définition de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est le plus petit ensemble de mots les satisfaisant :
$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}}$$

3. Coffre fort

Considérons cinq variables propositionnelles $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et E. À chaque situation possible (présence d'un certain nombre de gens parmi Alice, Bernard, Christine, Dominique et Emile), on associe une distribution de valeurs de vérités δ sur notre ensemble de variables, de la façon suivante :

- si Alice est présente, alors $\delta(\mathrm{A}) = 1$, sinon $\delta(\mathrm{A}) = 0$.
- si Bernard est présent, alors $\delta(\mathrm{B}) = 1$, sinon $\delta(\mathrm{B}) = 0$.
- idem pour Christine, Dominique et Emile.

La formule d'ouverture du coffre s'écrit alors aisément en fonction de nos variables propositionnelles : le coffre s'ouvre si et seulement si

- Alice ET Bernard sont là, c'est-à-dire $\overline{\delta}\,(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = 1$.
- Ou alors Alice, Christine ET Dominique sont là, c'est-à-dire $\overline{\delta}\,(\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \wedge \mathrm{D}) = 1$.
- Ou enfin Bernard, Dominique ET Emile sont là, c'est-à-dire $\overline{\delta}\,(\mathrm{B} \wedge \mathrm{D} \wedge \mathrm{E}) = 1$.

Autrement dit, la formule d'ouverture du coffre s'écrit :

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E)$$

En utilisant les règles de distibutivité de la disjonction par rapport à la conjonction et réciproquement, on peut alors transormer cette écriture, pour passer d'une disjonction de conjonctions au contraire (conjonctions de disjonctions). Cette transformation formelle semble anodine, mais nous allons voir qu'elle permet de répondre directement à notre problème. Transformons donc. Pour faciliter la lecture, nous allons d'abord transformer l'expression $(A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D)$:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \quad \Leftrightarrow \quad (A \vee (A \wedge C \wedge D)) \wedge (B \vee (A \wedge C \wedge D))$$

Rappelons ici tout de suite les *lois d'absorption* :

$$P \vee (P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \tag{1}$$

et

$$P \wedge (P \vee Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \tag{2}$$

En effet, toute distribution de valeur de vérité qui affecte à la variable P la valeur 1 vaudra 1 également en $P \vee (P \wedge Q)$ et réciproquement. Idem pour $P \wedge (P \vee Q)$.

Appliquant (1) à $P = A$ et $Q = C \wedge D$, on obtient :

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \quad & \Leftrightarrow \quad A \wedge (B \vee (A \wedge C \wedge D)) \\ & \Leftrightarrow \quad A \wedge (B \vee A) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D) \\ & \Leftrightarrow \quad A \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D) \end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, on a appliqué (2) à $P = A$ et $Q = B$.

Passons maintenant à la totalité de la formule d'ouverture du coffre à savoir, en appliquant l'équivalence précédente :

$$(A \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)) \vee (B \wedge D \wedge E)$$

On trouve mécaniquement, en distribuant le terme $(B \wedge D \wedge E)$:

$$(A \vee (B \wedge D \wedge E)) \wedge ((B \wedge C) \vee (B \wedge D \wedge E)) \wedge ((B \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E))$$

Là encore, nous allons transformer les termes un par un :

$$(A \vee (B \wedge D \wedge E)) \quad \Leftrightarrow \quad (A \vee B) \wedge (A \vee D) \wedge (A \vee E)$$

Pour les deux autres termes on constate que les lois d'absorption s'appliquent. En posant $P = B$ et $Q = B \wedge D \wedge E$, on trouve

$$B \vee (B \wedge D \wedge E) \quad \Leftrightarrow \quad B$$

donc

$$(B \wedge C) \vee (B \wedge D \wedge E) \quad \Leftrightarrow \quad B \vee C$$

De même

$$(B \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E) \quad \Leftrightarrow \quad B \vee D$$

On obtient donc comme expression pour la formule du coffre :

$$(A \vee B) \wedge (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

OUF ! Il ne reste plus qu'à interpréter cette formule en termes de coffre fort. Ceci signifie qu'il sera ouvert lorsque seront présent :

- Alice ou Bernard, qui possèdent tous deux la clé de la première serrure.
- Alice ou Dominique, qui possèdent tous deux la clé de la deuxième serrure.

– Alice ou Emile, qui possèdent tous deux la clé de la troisième serrure.
– Bernard ou Christine, qui possèdent tous deux la clé de la quatrième serrure.
– Bernard ou Dominique, qui possèdent tous deux la clé de la cinquième serrure.

4. Distribution de valeurs de vérités

– Soit δ une distribution de valeurs de vérités qui satisfait F. En particulier, δ satisfait la formule $\mathrm{A}_i \Rightarrow \mathrm{A}_{i+1}$ pour tout entier $i \leq n-1$. C'est-à-dire que si $\delta(\mathrm{A}_i) = 1$, alors $\delta(\mathrm{A}_{i+1}) = 1$.
La suite $(\delta(\mathrm{A}_i))_{i \leq n}$, à valeurs dans $\{0, 1\}$, doit donc être croissante. Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle condition est suffisante pour que δ satisfasse F.
On trouve donc $n+1$ distributions de valeurs de vérités qui conviennent. Il s'agit des distributions $(\delta_i)_{0\ leqi \leq n}$ définies par :

$$\delta_i : \mathrm{A}_j \mapsto 0 \text{ si } j \leq i, \quad 1 \text{ sinon}$$

– On a la contrainte supplémentaire $\delta(\mathrm{A}_n) \leq \delta(\mathrm{A}_1)$. Seules les distributions δ_0 et δ_n définies précédemment satisfont à cette contrainte. Réciproquement, on montre aisément qu'elles satisfont G.

– Soit δ une distribution de valeurs de vérités satisfaisant H. Soit i tel que $\delta(\mathrm{A}_i) = 1$. Alors δ doit satisfaire les formules $\mathrm{A}_i \Rightarrow \neg \mathrm{A}_j$ pour tout $j \neq i$. En particulier, on a nécessairement $\delta(\mathrm{A}_j) = 0$ pour $j \neq i$, c'est-à-dire que δ prend au plus une fois la valeur 1 sur l'ensemble P.
Réciproquement, une distribution de valeurs de vérités qui prend au plus une fois la valeur 1 sur P satisfait H...

8. Algèbre ?

1 Soit δ une dvv satisfaisant A_n. Nécessairement, $\delta(\mathrm{X}_0) = 1$.
Si il existe $i \neq 0$ tel que $\delta(\mathrm{X}_i) = 1$, alors on doit aussi avoir $\delta(\mathrm{X}_{2i}) = 1$, $\delta(\mathrm{X}_{3i}) = 1$, etc.
C'est-à-dire que δ doit prendre la valeur 1 en X_m, pour tout m dans le sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par i.
Plus généralement, l'ensemble des indices m tels que $\delta(\mathrm{X}_m) = 1$ est un sous groupe additif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$!
Comme 7 est premier, le groupe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ n'a que des sous groupes triviaux ($\{0\}$ et lui-même). Les seules dvv satisfaisant A_7 sont la dvv constante égale à 1, et celle qui vaut 1 en X_0 et 0 ailleurs. (Là aussi, il faut vérifier que ces dvv conviennent).
Pour A_{15}, il y a 4 dvv qui conviennent, correspondant aux sous groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$:

$$\{0\}, \{0, 5, 10\}, \{0, 3, 6, 9, 12\} \text{ et } \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \text{ tout entier}$$

6. Ensembles indépendants

3 Enlever des formules jusqu'à obtenir un ensemble indépendant.

4 Théorème de compacité.

5 L'idée est de construire un ensemble de formules $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour $n < m$, on ait F_n conséquence de F_m, mais pas le contraire. Tout sous-ensemble de $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ à au moins deux éléments ne pourra être indépendant.

Et un seul élément ne suffit pas : la formule F_n n'entraînant pas la formule F_{n+1}, le singleton $\{F_n\}$ ne peut être équivalent à l'ensemble $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Par exemple, avec les variables propositionnelles $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, on peut prendre

$$F_n = \bigwedge_{i\leq n} X_i$$

6 Partant d'un ensemble des formules $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, on commence par éliminer les F_n qui sont conséquences de $\{F_0, \ldots, F_{n-1}\}$.

Puis l'on considère l'ensemble

$$\left\{F_0, F_0 \Rightarrow F_1, \ldots, \left(\bigwedge_{i\leq n} F_i\right) \Rightarrow F_{n+1}, \ldots\right\}$$

7. Systèmes complets de connecteurs

1 Par induction sur la hauteur des formules...

2 Pour montrer qu'un ensemble de connecteurs est un système complet de connecteurs, il suffit d'exprimer la négation d'une formule et la conjonction de deux formules à l'aide des connecteurs de notre ensemble.

Pour montrer le contraire, trouver une dvv qui prouve, par induction sur l'ensemble des formules que l'on peut construire avec ces connecteurs, qu'aucune de celles-ci n'est logiquement équivalente à une formule bien choisie.

8. Théorème de compacité

1 L'espace discret $\{0, 1\}$ est compact. On applique donc Tychonoff.

2 La valeur de $\delta(F)$ ne dépend que de la valeur de δ sur les variables $A_1, \ldots, A_n$ qui interviennent dans l'écriture de F. Si B désigne l'ensemble des n-uplets de valeurs des variables $A_1, \ldots, A_n$ telles que F est satisfaite, alors on a

$$\Delta(F) = \bigcup_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in B} \{\epsilon_1\} \times \ldots \times \{epsilon_n\} \times \prod_{X\neq A_1,\ldots,A_n} \{0, 1\}$$

$\Delta(F)$ est donc une réunion d'ouverts élémentaires, donc un ouvert.

3 Le complémentaire de $\Delta(F)$ est constitué de l'ensemble des dvv qui affectent la valeur 0 à F, soit la valeur 1 à $\neg F$. C'est donc $\Delta(\neg F)$, et le même raisonnement s'applique, donc le complémentaire de $\Delta(F)$ est ouvert, c'est-à-dire que $\Delta(F)$ est fermé.

4 Une dvv satisfait T si et seulement si elle satisfait toutes les formules de T, c'est-à-dire si elle est dans l'intersection $\bigcap_{F\in T} \Delta(F)$. Si T est contradictoire, alors aucune dvv ne satisfait cette condition, et donc l'intersection $\bigcap_{F\in T} \Delta(F)$ est vide. (Et réciproquement.) On a alors une intersection de fermés qui est vide, et donc, par compacité, on peut trouver des formules $F_1, \ldots, F_n$ (en nombre fini) dans T telles que $\Delta(F_1) \cap \ldots \cap \Delta(F_n) = \emptyset$. La théorie $T_0 = \{F_1, \ldots, F_n\}$, sous-ensemble fini de T, est contradictoire.