TD 5 : corrections et indications

07/11/03

1.4. Relations d'équivalence

- Dans T_0, on mets les formules :
  - $\forall x\,(x\mathrm{R}x)$
    $\forall x \forall y\,((x\mathrm{R}y) \Longrightarrow (y\mathrm{R}x))$
    $\forall x \forall y \forall z\,(((x\mathrm{R}y) \wedge (y\mathrm{R}z)) \Longrightarrow (x\mathrm{R}z))$
    (R est une relation d'équivalence)
  - Pour chaque entier n, la formule
    $\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \mathrm{R} x_j) \right)$
    (il y a n éléments non deux à deux en relations, c'est-à-dire qu'il y a au moins n classes d'équivalence)
    et la formule
    $\forall x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_1 \mathrm{R} x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$
    (tout élément est en relation avec au moins n éléments distincts, donc toute classe d'équivalence a au moins n éléments...)

  On a vu qu'une théorie finiment axiomatisable pouvait être axiomatisée par un sous-ensemble fini d'elle-même. Ici, tout sous-ensemble fini de T_0 admet un modèle fini, donc en particulier un modèle qui n'est pas dans K_0. C'est-à-dire qu'aucun sous-ensemble fini de T_0 ne peut axiomatiser K_0, et donc K_0 n'est pas finiment axiomatisable.
- T_0 est $\aleph_0$-catégorique, mais catégorique en aucun autre cardinal.
  En effet, tout modèle de cardinal $\aleph_0$ est isomorphe à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la relation d'équivalence
  $$(n,m)\mathrm{R}(n',m') \quad \Longleftrightarrow \quad n = n'$$
  En effet, un tel modèle $\mathcal{M}$ contient forcément une infinité dénombrable de classes d'équivalence (une infinité par hypothèse, dénombrable car sinon le modèle ne peut l'être...). Soit donc f une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des classes d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est ensuite elle-même infinie dénombrable, donc en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit g_n une bijection de $\mathbb{N}$ sur la n-ième classe d'équivalence (*i.e.* $f(n)$).
  Alors la fonction g de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans l'ensemble de base M de $\mathcal{M}$ définie par :
  $$(n,m) \mapsto g_n(m)$$
  est bien bijective (la vérification est immédiate). D'autre part, on vérifie que $g\,((n,m))\;\mathrm{R}\;g\,((n',m'))$ si et seulement si $n = n'$. C'est-à-dire que g induit un

isomorphisme de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, muni de la relation d'équivalence définie par l'égalité de la première composante, sur $\mathcal{M}$. Tous les modèles dénombrables de T_0 sont donc isomorphes.

- En revanche, si λ désigne un cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$, on trouve aisément deux modèles non isomorphes de T_0 de cardinal λ : il suffit de prendre un modèle qui contient une classe d'équivalence de cardinal λ, et une infinité dénombrable de classes dénombrables, et un deuxième modèle qui contient deux classes d'équivalences de cardinal λ, par exemple...
- T_0 n'admet que des modèles infinis et est $\aleph_0$-catégorique, donc T_0 est complète (théorème de Vaught).

2. Équivalence élémentaire et isomorphie

Soient $a_1, \dots, a_n$ les éléments de M (N a également n éléments.)

On admet l'existence, pour toute fonction f du langage, d'une formule $\mathrm{F}[x_1, \dots, x_n]$ à n variables libres qui décrit le comportement de la fonction f dans le modèle $\mathcal{M}$. (Idem pour les relations, les constantes...). Par exemple, si f est d'arité 1 et que l'on a dans $\mathcal{M}$:

$$f^{\mathcal{M}}(a_1) = a_{i_1}, \dots, f^{\mathcal{M}}(a_n) = a_{i_n}$$

alors la formule $\mathrm{F}_f[x_1, \dots, x_n]$ sera :

$$\bigwedge_{1 \leq k \leq n} f(x_k) = x_{i_k}$$

Soit A l'ensemble des bijections de M sur N. Supposons qu'aucune ne définit un isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures. Alors, pour toute formule φ, on a une fonction f_φ (ou une relation R_φ, ou une constante c_φ) qui témoigne du fait que φ n'est pas un isomorphisme. C'est-à-dire que la formule $\mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1 \rightsquigarrow a_i, \dots, x_n \rightsquigarrow a_n]$ est vraie dans $\mathcal{M}$, tandis que $\mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1 \rightsquigarrow \varphi(a_1), \dots, x_n \rightsquigarrow \varphi(a_n)]$ est fausse dans $\mathcal{N}$. Soit alors F la formule :

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathrm{A}} \mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1, \dots, x_n] \right) \right)$$

F est bien sûr vraie dans $\mathcal{M}$ (interpréter x_i par a_i), montrons qu'elle est fausse dans $\mathcal{N}$ (ce qui contredira l'équivalence élémentaire). Soient $b_1, \dots, b_n$ tels que la formule

$$\left(\left(\bigwedge_{i \neq j} [x_i \rightsquigarrow b_i] \neq [x_j \rightsquigarrow b_j] \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in \mathrm{A}} \mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1 \rightsquigarrow b_1, \dots, x_n \rightsquigarrow b_n] \right) \right)$$

soit vérifiée. En particulier les éléments $b_1, \dots, b_n$ sont deux à deux distincts, donc s'écrivent sous la forme $b_1 = \varphi(a_1), b_2 = \varphi(a_2), \dots, b_n = \varphi(a_n)$, avec φ une bijection de M sur N. Mais par construction $\mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1 \rightsquigarrow \varphi(a_1), \dots, x_n \rightsquigarrow \varphi(a_n)]$ est fausse dans $\mathcal{N}$, c'est-à-dire que $\mathrm{F}_{f_\varphi}[x_1 \rightsquigarrow b_1, \dots, x_n \rightsquigarrow b_n]$ est fausse dans $\mathcal{N}$. La conjonction précédente est donc fausse dans $\mathcal{N}$, d'où la contradiction.