TD 7 : quelques corrections

23/11/03

2. Ensembles définissables 2/2

Soit ϕ un isomorphisme de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ sur la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$. Pour toute formule $\mathrm{F}[x_1, \ldots, x_n]$ et pour tous éléments $m_1, \ldots, m_n$ de l'ensemble de base M de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow m_1, \ldots, x_n \rightsquigarrow m_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow \phi(m_1), \ldots, x_n \rightsquigarrow \phi(m_n)]$$

(pour la démonstration, commencer par étudier l'effet de ϕ sur les termes, puis montrer le résultat pour les formules atomiques, puis par induction sur la hauteur des formules...)

1 Soit A une partie définissable d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, et $\mathrm{F}[x_1, \ldots, x_n]$ une formule définissant A.

Pour tout n-uplet $(m_1, \ldots, m_n)$ dans A et tout automorphisme h de $\mathcal{M}$, on a

$$\mathcal{M} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow m_1, \ldots, x_n \rightsquigarrow m_n]$$

donc $$\mathcal{M} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow h(m_1), \ldots, x_n \rightsquigarrow h(m_n)]$$

c'est-à-dire que $(h(m_1), \ldots, h(m_n))$ est encore dans A.

2 Tout automorphisme de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ préserve les interprétations des symboles de constantes (pour tout entier naturel n, l'ensemble $\{n\}$ est défini par la formule $x = c_n$).

En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est préservé dans son ensemble. Comme un automorphisme est avant tout une bijection, l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ est lui aussi préservé par tous les automorphismes.

Supposons l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ définissable, par une formule $\mathrm{F}[x]$ à une variable libre. Alors F n'utilise qu'un nombre fini de symboles de constantes. Il semble évident qu'un entier naturel n_0 tel que le symbole c_n n'est pas présent dans F sera tel que la formule $\mathrm{F}[x \rightsquigarrow n_0]$ sera vraie. Montrons le...

Soit donc un tel entier $n_0 > 0$ désormais fixé.

On considère le langage $\mathcal{L}'$ constitué du symbole d'égalité et des constante c_n **qui apparaissent dans** F. Soit $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}'$-structure d'ensemble de base $\mathbb{Z}$, dans laquelle chaque constante c_n du langage $\mathcal{L}'$ est interprétée par l'entier n. Le langage $\mathcal{L}$ est alors un *enrichissement* du langage $\mathcal{L}'$, et $\mathcal{M}$ est un *enrichissement* de $\mathcal{N}$ au langage $\mathcal{L}$. Dans ces conditions on a le résultat général suivant :

Si $\mathrm{G}[x_1, \ldots, x_n]$ est une formule de $\mathcal{L}'$ et $a_1, dots, a_n$ des éléments de l'ensemble de base de nos structures, alors

$$\mathcal{M} \models \mathrm{G}[x_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, x_n \rightsquigarrow a_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, x_n \rightsquigarrow a_n]$$

(comme d'habitude, ceci se démontre par induction sur F...)

Ici, on a donc, dans le modèle $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow a] &\Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow a] \\ &\Longleftrightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{aligned}$$

L'application ϕ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui permute n_0 et $-n_0$ est un automorphisme de $\mathcal{N}$. Comme on a, par définition de F,

$$\mathcal{M} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow -n_0] \text{ donc } \mathcal{N} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow -n_0]$$

on obtient $\qquad \mathcal{N} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow \phi(-n_0)]$ donc $\mathcal{M} \models \mathrm{F}[x \rightsquigarrow n_0]$

ce qui contredit la définition de la formule F.

3 Soit ϕ un automorphisme.
En considérant la formule $\exists y \exists z \mathrm{S}(x, y, z)$, qui n'est satisfaite que par les éléments 1 et -1, on obtient :

$$\phi(1) = 1 \text{ ou } -1$$

De même $\qquad \phi(2) = 2 \text{ ou } -2$

et $\qquad \phi(3) = 3 \text{ ou } -3$

Supposons donc que ϕ n'ait pas de point fixe. Alors $\phi(1) = -1$, $\phi(2) = -2$ et $\phi(3) = -3$. On obtient une contradiction en remarquant qu'alors

$$\mathcal{M} \models \mathrm{S}(1, 2, 3) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \not\models \mathrm{S}(\phi(1), \phi(2), \phi(3))$$

Seuls les points $-3, -2, -1, 1, 2$ et 3 sont des candidats raisonnables à être des points définissables. Mais, prolongées à $\mathbb{Z}$ tout entier par l'identité, les bijections suivantes de l'ensemble $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ définissent des automorphismes de $\mathcal{M}$ qui montrent qu'aucun de ces points n'est fixé par TOUS les automorphismes de $\mathcal{M}$. Il suffit de prolonger par l'identité les deux applications suivantes :

$$1 \longmapsto 1, -1 \longmapsto -1, 2 \longmapsto -2, -2 \longmapsto 2, 3 \longmapsto -3, -3 \longmapsto 3$$

et $\qquad 1 \longmapsto -1, -1 \longmapsto 1, 2 \longmapsto -2, -2 \longmapsto 2, 3 \longmapsto 3, -3 \longmapsto -3$

3. Réels

1 Pour envoyer a sur b, considérer l'application $x \longmapsto x + (b - a)$. Pour envoyer a sur c et b sur d (avec $a < b$ et $c < d$), considérer l'application (strictement croissante) $x \longmapsto (d - c)\dfrac{x - a}{b - a} + c$.

2 Les parties de $\mathbb{R}$ définissables sont exactement $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ (si l'on a un point a dans une partie définissable A, alors tout réel b est dans A en tant qu'image de a par un automorphisme). De même, si A est une partie définissable de $\mathbb{R}^2$, si un couple (a, a) est dans A, alors tout couple (b, b) est dans A. Et si $(a, b) \in$ A avec $a < b$ (resp. $a > b$), alors tout couple (c, d) avec $c < d$ (resp. $c > d$) est dans A. Les parties définissables de $\mathbb{R}^2$ sont donc $\emptyset$, $\{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, y), x < y\}$ et $\{(x, y), x > y\}$, ainsi que toute réunion de ces ensembles.

3 Un $\mathcal{L}$-automorphisme ϕ de $\mathcal{M}$ doit fixer les points 0 et 1 et vérifier les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \\ \phi(-x) = -\phi(x) \\ \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \end{cases}$$

La première propriété permet de montrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) = n$$

Ensuite, la seconde permet de montrer la même propriété pour les entiers relatifs. Enfin, pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $\phi\left(\frac{p}{q}\right) = \phi(p) \cdot \phi\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot \phi\left(\frac{1}{q}\right)$, avec $1 = \phi(1) = \phi\left(\frac{q}{q}\right) = q \cdot \phi\left(\frac{1}{q}\right)$. Et donc $\phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$. C'est-à-dire que ϕ fixe tous les rationnels.

4 On définit la relation $x \leq y$ par $\exists z, z \cdot z = y + (-x)$ ($y - x$ est un carré). Étant donné deux réels $a < b$, on a donc $\mathcal{M} \models \exists z, z \cdot z = b - a$ et donc $\mathcal{M} \models \exists z, z \cdot z = \phi(b) - \phi(a)$, c'est-à-dire que ϕ est croissant sur $\mathbb{R}$.

Or une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fixe tous les rationnels est nécessairement l'identité...

5 Le nombre de parties définissables de $\mathbb{R}$ est majoré par le nombre de formules à une variable libre. Il est donc dénombrable... Or le nombre de parties de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, d'où le résultat.

6 Pour α et β transcendants, on a un isomorphisme de corps de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}(\beta)$ naturel. Celui-ci s'étent en un isomorphisme de leur clôtures algébriques, et même à $\mathbb{C}$ tout entier via le choix d'une base de transcendance.

Si $\mathbb{R}$ était définissable dans $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{R}$ serait stable par automorphisme. C'est absurde, il suffit de choisir α un nombre transcendant réel, et $\beta = i\alpha$, par exemple.