TD 8 : quelques corrections

04/12/03

2. Généralisation

1 On définit ϕ comme on veut sur les formules atomiques (par exemple, on pose $\phi(\mathrm{F}) = 0$ pour tout formule atomique F). Puis, on définit ϕ par induction sur la hauteur des formules grâces aux règles a, b, c, d. Celles-ci sont compatibles entre elles, grâce au théorème de lecture unique !

2 Aucun problème pour les schémas d'axiomes 2, 3, 4. (Par exemple, pour les axiomes de type 4 $(\forall v\mathrm{F}(v) \Rightarrow \mathrm{F}(t))$, on a par construction $\phi\,(\forall v\mathrm{F}(v)) = 0$ et donc, quelle que soit la valeur de $\phi\,(\mathrm{F}(t))$, on a bien par construction $\phi\,(\forall v\mathrm{F}(v) \Rightarrow \mathrm{F}(t)) = 1$.

Pour les tautologies du calcul des prédicats, deux solutions. Soit on se restreint aux tautologies du calcul propositionnel de $\mathrm{T}aut_0$ (théorème de complétude du calcul propositionnel admis), auquel cas on n'a qu'un nombre fini de vérifications à faire (fastidieuses). Une autre solution, plus générale, consiste à considérer une tautologie σ fixée du calcul des prédicats.

σ est de la forme $\mathrm{F}[\sigma_1/\mathrm{A}_1, \ldots, \sigma_n/\mathrm{A}_n]$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont des formules quelconques du calcul des prédicats.

Sur l'ensemble des formules propositionnelles possibles construites sur les variables $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, on définit une distribution de valeurs de vérités δ par :

- Pour tout $i \leq n$, on pose $\delta(\mathrm{A}_i) = \phi(\sigma_i)$.
- On étend δ à l'ensemble des formules de la manière classique (induction sur la hauteur. . .)

Par définition de ϕ (règles c et d), on montre (toujours par induction sur la hauteur) que pour toute formule G, on a $\delta(\mathrm{G}) = \phi\,(\mathrm{G}[\sigma_1/\mathrm{A}_1, \ldots, \sigma_n/\mathrm{A}_n])$.

Enfin, F est une tautologie, donc $\delta(\mathrm{F}) = 1$. Cela nous donne immédiatement $\phi\,(\mathrm{F}[\sigma_1/\mathrm{A}_1, \ldots, \sigma_n/\mathrm{A}_n])$, c'est-à-dire $\phi(\sigma) = 1$.

3 Si $\phi(\mathrm{F}) = 1$ et $\phi(\mathrm{G}) = 0$, alors par la règle d on a $\phi(\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}) = 0\ldots$

4 Par induction sur la longueur de la démonstration.

5 La formule $\forall v(\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F})$, démontrée par généralisation à partir de la tautologie $\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}$, vérifie par la règle a

$$\phi\,(\forall v(\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F})) = 0$$

Or d'après ce qui précède, si cette formule était démontrable sans la règle de généralisation, alors on aurait $\phi\,(\forall v(\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F})) = 1$!

3. Démonstrations par coupure (cf Cori-Lascar)

2 Par induction sur la longueur de la démonstration, on montre que toute distribution de valeurs de vérités qui satisfait Γ satisfait l'ensemble des clauses obtenues par démonstration par coupure à partir de Γ.

Comme aucune distribution de valeurs de vérités ne satisfait la clause vide (pour ceux que cette "convention" gêne, la clause vide ne peut être montrée que pas coupure à partir de deux clauses $\mathrm{A} \Rightarrow$ et $\Rightarrow \mathrm{A}$, c'est-à-dire les formules A et $\neg$A, qui ne sont pas simultanément satisfaisables), on conclue que si Γ est réfutable, Γ n'est pas satisfaisable.

3 Si Γ' était satisfaisable, soit δ une distribution de valeurs de vérités sur les variables apparaissant dans Γ' qui satisfait Γ'. On prolonge δ à l'ensemble des variables apparaissant dans Γ en posant $\delta(\mathrm{A}) = 1$ (et n'importe quoi pour les autres variables). Comme les formules de $\Gamma \setminus \Gamma'$ ont la variable A dans leur conclusion, δ satisfait leur conclusion donc les satisfait. Et donc Γ est satisfaisable, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si A n'apparait que dans des prémisses, on pose au contraire $\delta(\mathrm{A}) = 0$. Les prémisses des formules de $\Gamma \setminus \Gamma'$ ne sont pas satisfait par δ, donc δ satisfait ces formules.

4 OK si $n = 1$: pour que Γ ne soit pas satisfaisable, il faut que $\Gamma = \{\mathrm{A} \Rightarrow ; \Rightarrow \mathrm{A}\}$, et alors Γ est réfutable.

Supposons le résultat établi pour n variables. Soit Γ contenant $n+1$ variable, A une variable apparaissant dans Γ. D'après la question précédente, A apparait dans des prémisses et dans des conclusions. (Sinon on peut déjà se ramener à n variable...)

On pose Γ_0 l'ensemble des formules dans lesquelles n'apparait pas A, $\Gamma^- = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_p\}$ l'ensemble des formules dans lesquelles A apparait dans la prémisse, et $\Gamma^+ = \{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_q\}$ l'ensemble des formules dans lesquelles A apparait dans la conclusion.

Enfin, on note $\Gamma_1 = \{\mathcal{E}_{i.j} \ ; \ i \leq p, j \leq q\}$ l'ensemble de toutes les clauses possibles obtenues par coupure en la variable A à partir d'une formule $\mathcal{C}_i$ de Γ^- et d'une formule $\mathcal{D}_j$ de Γ^+. On va montrer que $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ n'est pas satisfaisable (et donc réfutable par hypothèse de récurrence, donc Γ aussi).

Soit δ une distribution de valeurs de vérité qui satisfait Γ'. En particulier δ satisfait Γ_0. comme A n'apparait pas dans Γ', on peut supposer $\delta(\mathrm{A}) = 0$. Soit δ' la distribution qui coïncide avec δ, sauf en A où elle vaut 1.

Comme $\delta(\mathrm{A}) = 0$, la distribution δ satisfait toutes les formules de Γ^- (et δ' toutes celles de Γ_0 et Γ^+). Comme Γ n'est pas satisfaisable, δ ne peut satisfaire toutes les formules de Γ^+. Il existe donc un indice $j \leq q$ tel que $\delta\left(\mathcal{D}_j^-\right) = 1$ et $\delta\left(\mathcal{D}_j^+\right) = 0$, où $\mathcal{D}_j^-$ désigne la prémisse de la clause $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}_j^+$ sa conclusion.

Soit un tel indice j et $i \leq p$. On sait que δ satisfait $\mathcal{E}_{i,j}$, donc de deux choses l'une :

– Soit $\delta\left(\mathcal{E}_{i,j}^-\right) = 0$. Or $\mathcal{E}_{i,j}^-$ est la conjonction de $\mathcal{D}_j^-$ et $\mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}'$ est la prémisse $\mathcal{C}_i^-$ de $\mathcal{C}_i$ privée de la variable A. Comme par ailleurs $\delta\left(\mathcal{D}_j^-\right) = 1$, on a nécessairement $\delta\left(\mathcal{C}'\right) = 0$. Comme A n'apparait pas dans $\mathcal{C}'$, on a aussi $\delta'\left(\mathcal{C}'\right) = 0$, et donc $\delta'\left(\mathcal{C}_i^-\right) = 0$, et finalement $\delta'\left(\mathcal{C}_i\right) = 1$.

– Soit $\delta\left(\mathcal{E}_{i,j}^{+}\right) = 1$. Or $\mathcal{E}_{i,j}^{+}$ est la disjonction de $\mathcal{C}_i^{+}$ et $\mathcal{D}'$, où $\mathcal{D}'$ est la conclusion $\mathcal{D}_j^{+}$ de $\mathcal{D}_j$ privée de la variable A. Comme par ailleurs $\delta\left(\mathcal{D}_j^{+}\right) = 0$, on a *a fortiori* $\delta(\mathcal{D}') = 0$, et donc nécessairement $\delta\left(\mathcal{C}_i^{+}\right) = 1$. Comme A n'apparait pas dans $\mathcal{C}_i^{+}$, on a aussi $\delta'\left(\mathcal{C}_i^{+}\right) = 1$, et donc $\delta'(\mathcal{C}_i) = 1$.

On vient de montrer que δ' satisfait Γ^{-}. Or on sait que δ' satisfait les formules de Γ_0 et de Γ^{+}. Donc δ' satisfait Γ, ce qui est absurde.

Soit Γ un ensemble quelconque de clauses, non satisfaisable. On peut supposer que γ ne contient pas la clause vide, ni de tautologies, et que toutes les clauses de Γ sont simplifiées. D'après le théorème de compacité du calcul propositionnel, Γ contient un sous-ensemble fini Γ' lui-même non satisfaisable. Étant fini, Γ' n'utilise qu'un nombre fini de variable, donc est réfutable d'après ce qui précède. Et donc Γ est réfutable.

6 Soit n le nombre total de variables propositionnelles. Si m désigne le nombre de variables apparaissant dans une clause F, les distributions de valeur de vérité qui ne satisfont pas F sont celles qui affectent 1 à toutes les variable de la prémissent de F et 0 à toutes les variables de sa conclusion. En particulier, la valeur de ces distributions en les variables apparaissant dans F est fixée. Il y a donc exactement 2^{n-m} telles distributions (2 choix par variable n'apparaissant pas dans F).

Dans notre cas précis, il y a au plus 2^{n-3} distribution qui ne satifont pas une clause donnée. Et pour qu'un distribution ne satisfasse pas S, il faut et il suffit qu'elle ne satisfasse pas l'une des sept clause. Il y a donc au plus $7 \times 2^{n-3}$ distributions qui ne satisfont pas S. Comme $7 \times 2^{n-3} < 2^n$, il y a nécessairement au moins une distribution qui satisfait S.