TD 1 : Ensembles, dénombrement

Thomas Chomette

03/10/03

1. Opérations sur les ensembles.
Soient $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ensembles dénombrables.

1 Montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ est dénombrable.

2 Montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$ est dénombrable pour tout entier n.

2. Ensembles classiques.

1 Interpréter chacun des ensembles suivants, et calculer leurs cardinaux.
- $x_1 = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ f(n) \leq p\right\}$
- $x_2 = \left\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ (n < p \Rightarrow f(n) < f(p))\right\}$
- $x_3 = \left\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ (n \leq p \Rightarrow f(n) = f(p))\right\}$
- $x_4 = \left\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ f(n) \leq p\right\}$
- $x_5 = x_2 \cap x_4$

2 Quel est le cardinal de l'ensemble des suites de rationnels qui convergent ? Qui convergent vers 0 ?
(Au passage, on note donc que la construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy ne nous renseigne pas outre mesure sur son cardinal. . .).

3 Quel est le cardinal de l'ensemble des suites de rationnels bornées ? Non bornées ?

3. Parties d'un ensemble.
Soit A un ensemble infini.

1 Montrer que, si X est une partie dénombrable de A avec $\mathrm{A} \setminus \mathrm{X}$ infini, alors A et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{X}$ sont équipotents.

2 Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_{fin}(\mathrm{A})$ des parties finies de A est équipotent à A.

3 On rappelle que, pour tout ensemble X, il n'y a pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(\mathrm{X})$.
(Pour cela, on raisonne par l'absurde en considérant $\{x \in \mathrm{X}, x \notin f(x)\}$.)
Montrer alors que l'ensemble $\mathcal{P}_{inf}(\mathrm{A})$ des parties infinies de A n'est pas équipotent à A.

4. Cantor-Bernstein.
Soit X un ensemble et Y une partie de X. Soit f une injection de X dans Y.

1 Soit $\mathrm{A}_0 = \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$. On définit par récurrence les ensembles $\mathrm{A}_{n+1} = f(\mathrm{A}_n)$. Montrer que les ensembles $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

2 Montrer que f réalise une bijection de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$.

3 En déduire une bijection de X sur Y.

4 Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein : « Soient A et B deux ensembles, tels qu'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A. Alors il existe une bijection de A sur B. »

5. Cardinal des réels.

1 Construire une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser les nombres de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n}$, avec $\varepsilon_n = 0$ ou 1 pour tout $\mathbb{N}$.)

2 Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En déduire que le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ est égal au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3 Construire une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Conclure par le théorème de Cantor-Bernstein.

6. Cardinal des réels, bis.

1 Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est isomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et que $[\,0\,;1\,]$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

2 On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & [\,0\,;1\,] \\ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \end{array} \right.$$

Montrer que f est surjective.

3 Quels sont les points de $[\,0\,;1\,]$ qui ont plusieurs antécédents ? Montrer qu'ils ont exactement 2 antécédents, et qu'ils sont en nombre dénombrable.

4 Adapter f pour avoir une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $[\,0\,;1\,]$. Conclure.

7. Un peu de calcul propositionnel.

On a défini l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles sur un ensemble de variables P comme le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des mots écrits sur l'alphabet :

$$\mathcal{L} = \mathrm{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$$

et vérifiant :

- $\mathcal{F}$ contient P.
- Si un mot F est dans $\mathcal{F}$, alors le mot $\neg$F également.
- Si $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{F}$ et $\varepsilon = \wedge, \vee, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$, alors $(\mathrm{F}\varepsilon\mathrm{G}) \in \mathcal{F}$.

On défini par récurrence une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{L}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_0 = \mathrm{P} \\ \text{et pour tout } n, \\ \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg\mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathcal{F}_n\} \\ \qquad \cup \{(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}), (\mathrm{F} \vee \mathrm{G}), (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}), (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{G}), \quad \mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{F}_n\} \end{array} \right.$$

Montrer que : $$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$