TD 10 : Fonctions récursives

Thomas Chomette

12/12/03

La classe **PR** des fonctions *récursives primitives* est la plus petite classe de fonctions (totales) de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ (pour tout entier p) telle que :

– **PR** contient les fonctions constantes, les projections, et la fonction successeur ;
– **PR** est close par composition et par récurrence.

La classe **Rec** des fonctions *récursives partielles* est elle la plus petite classe de fonctions partielles de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ (pour tout entier p) qui contient **PR** et est close pour le schéma μ.

1. Fonctions

1 Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives :

- S*omme* : $(x, y) \mapsto x + y$
- M*ult* : $(x, y) \mapsto x * y$
- P*red* : $x \mapsto \begin{cases} x - 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- M*oins* : $(x, y) \mapsto \begin{cases} x - y \text{ si } x \geq y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- P*uissance* : $(x, y) \mapsto x^y$
- S*g* : $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2 Montrer que la fonction suivante (de Fibonacci) est récursive primitive :

– $f(0) = f(1) = 1$;
– $f(n + 2) = f(n) + f(n + 1)$.

3 Montrer que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive si et seulement si son graphe $\mathrm{G} = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ est récursif. (*i.e.* la fonction caractéristique de G est récursive.)

(4 Montrer que la fonction n-ième décimale de e est récursive primitive.)

2. Fonction β de Gödel

On se place dans un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}_0$. ($\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$).

Lemme des restes Chinois : Soient $(n_1, \ldots, n_p)$ une suite d'entiers naturels premier entre eux deux à deux, et $(a_1, \ldots, a_p)$ une suites d'entiers. Alors il existe un entier x tel que, pour tout indice $i \leq p$, on ait x congru à a_i modulo n_i.

D'autre part, on dit qu'une fonction f de p variables est *représentable* s'il existe une formule F du langage $\mathcal{L}$ telle que pour pour tous entiers $n_1, \ldots, n_p$ (standards) :

$$\mathcal{P}_0 \vdash \forall v_0 \Big(\mathrm{F}[v_0, \underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p] \Longleftrightarrow v_0 = \underline{f\,(n_1, \ldots n_p)}\Big)$$

(où $\underline{n}$ désigne le terme $\underbrace{s \circ \cdots \circ s}_{n \text{ fois}}(0)$)

(1 Démontrer le lemme des restes Chinois.)

Soit β la fonction de trois variables entières définie par :

« $\beta\,(i, a, b)$ est le reste de la division euclidienne de b par $a(i + 1) + 1$. »

2 Montrer que la fonction β est représentable (et récursive primitive).

3 Montrer que, pour toute suite finie d'entiers $(n_1, \ldots, n_p)$, il existe un couple (a, b) d'entiers tels que pour tout $i \leq p$ on ait :

$$\beta(i, a, b) = n_i$$

4 En déduire que l'ensemble des fonctions représentables est clos par le schéma de récurrence.

5 Montrer que les fonctions constantes, les projections, et la fonction successeur sont représentables. Montrer que l'ensemble des fonctions représentables est clos par composition.

6 Montrer enfin que l'ensemble des fonctions représentables est clos par schéma μ total. (*i.e.* que si la fonction $f : (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \mu y\,(y, x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{A}$ est totale, et l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}^{p+1}$ représentable, alors f est représentable. L'ensemble A étant représentable si sa fonction caractéristique l'est...)

En déduire que toute fonction récursive (totale) est représentable.

3. Fonction d'Ackermann

La fonction d'Ackermann Ack est définie par

- $\mathrm{Ack}(0, x) = 2^x$;
- $\mathrm{Ack}(y, 0) = 1$;
- $\mathrm{Ack}(y + 1, x + 1) = \mathrm{Ack}(y, \mathrm{Ack}(y + 1, x))$.

1 Montrer que cette fonction est totale ; écrire les fonction $x \longmapsto \mathrm{Ack}(1, x)$ et $x \longmapsto \mathrm{Ack}(2, x)$. (Montrer également que la fonction Ack est calculable.)

Par la suite, on notera f_n la fonction $x \longmapsto \mathrm{Ack}(n, x)$, c'est-à-dire la n-ième fonction partielle d'Ackermann.

2 Montrer que, pour tout n, la fonction f_n est récursive primitive.

3 Montrer que f_n est strictement croissante, et que $f_n(x) > x$ pour tout x. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout x, on a $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$.

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$. On dit que f *domine* g si et seulement si il existe un entier A tel que, pour tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$, on ait :

$$g\,(x_1, \ldots, x_p) \leq f\,(\sup\,(x_1, \ldots, x_p, \mathrm{A}))$$

On note C_n l'ensemble des fonctions dominées par une itérée de la fonction f_n.

4 Montrer que les fonctions constantes, les projections, et la fonction successeur sont dans C_0.

5 Montrer que pour tout n, l'ensemble C_n est clos par composition.

6 Montrer que, si g et h sont dans C_n et f est obtenue à partir de g et h par le schéma de récurrence, alors f est dans C_{n+1}.

[On pourra auparavant démontrer la relation $f_n^k(x) \leq f_{n+1}(x + k)$.]

7 En déduire que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_n$ contient l'ensemble des fonctions récursives primitives, et donc que la fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.

N.B. On montre que la fonction d'Ackermann est récursive. C'est un résultat un peu plus compliqué à obtenir : le plus simple est d'invoquer un argument de point fixe d'une fonctionnelle définie sur les fonctions récursives (cf Cori-Lascar par exemple).