TD 11 : théorie des ensembles

Thomas Chomette

19/12/03

1. Manipulations d'axiomes

1 Montrer que pour tout a, $\{a,a\} = \{a\}$. Montrer le théorème

$$\forall x \forall y \exists z \forall t \quad t \in z \Leftrightarrow t \in x \vee t \in y.$$

2 On note (a,b) l'ensemble $\{\{a\},\{a,b\}\}$. Montrer que $(a,b) = (a',b')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

3 On définit par récurrence sur n le n-uplet $(a_1, \ldots a_n)$ par

$$(a_1, \ldots a_n) = (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$$

Montrer que si $(a_1, \ldots a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$, alors $a_i = b_i \quad \forall i \leq n$.

4 Soit $\mathrm{E}[x]$ une collection ; montrer que s'il existe un ensemble a tel que

$$\forall x \, (x \in a \Leftrightarrow \exists y \, \mathrm{E}[y] \wedge x \in y),$$

alors il existe un ensemble b tel que

$$\forall x \, (x \in b \Leftrightarrow \mathrm{E}[x]).$$

Quelle est la relation entre ce résultat et l'axiome de l'union ?

5 En utilisant le schéma de compréhension, montrer qu'il existe un unique ensemble qui n'a aucun élément. Il sera note $\emptyset$.

6 Montrer que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ est un ensemble à deux éléments que l'on explicitera. Soient a et b deux ensembles quelconques. En utilisant le schéma de substitution, montrer qu'il existe un ensemble ayant pour éléments a et b et eux seuls. (l'axiome de la paire est conséquence des autres axiomes…)

2. Consistance relative

On utilise, dans cet exercice, les notions intuitives d'entier, d'appartenance, etc. On nomme ZF^- la théorie ZF privée de l'axiome de l'infini et $\mathcal{W}$ l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$.

1 Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{W}$ une bijection, et $\in_\phi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation binaire définie par : $x \in_\phi y$ ssi $x \in \phi(y)$. Montrer que l'univers $\mathcal{U}_\phi = (\mathbb{N}, \in_\phi)$ est un modèle de ZF^-.

2 Déterminer les ordinaux $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$. Montrer que $\mathcal{U}_\phi$ ne vérifie pas l'axiome de l'infini.

3 Montrer que si, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on a : $\quad x \in \phi(y) \quad \Longrightarrow \quad x < y$
alors $\mathcal{U}_\phi$ satisfait aussi l'axiome de fondation (AF) :

$$\forall v_0 (\neg v_0 = \emptyset \Rightarrow \exists v_1 (v_1 \in v_0 \wedge v_0 \cap v_1 = \emptyset))$$

4 Montrer que $\zeta : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$, $\zeta(\emptyset) = 0$ et $\zeta(\mathrm{A}) = \sum_{a \in \mathrm{A}} 2^a$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{W}$ non-vide, est une bijection, et que $\mathcal{U}_{\zeta^{-1}}$ est un modèle de ZF^- et de AF.

5 Trouver une bijection $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{W}$ tel que $\mathcal{U}_\phi$ ne satisfasse pas AF.

3. Bons ordres

On rappelle qu'une relation d'ordre stricte R sur un ensemble E est un *bon ordre* si c'est une relation d'ordre totale sur E qui est *bien fondée*, c'est-à-dire telle que toute partie non vide admette un élément minimal.

1 Soit E un ensemble muni d'un bon ordre R. Montrer que sur E^2, l'ordre lexicographique induit par R est un bon ordre. ($(x, y) <_{lex} (x', y')$ si et seulement si $x \mathrm{R} x'$ ou alors $x = x'$ et $y \mathrm{R} y'$).

2 Montrer que l'ordre lexicographique n'est pas un bon ordre sur l'ensemble des suites finies à valeur dans E.

3 Montrer que la relation suivante, définie sur l'ensemble des suites finie à valeurs dans E, est un bon ordre :
$s < t$ si et seulement si $\sup(s) < \sup(t)$ ou $(\sup(s) = \sup(t)$ et $\lg(s) < \lg(t))$ ou $(\sup(s) = \sup(t)$ et $\lg(s) = \lg(t)$ et $s <_{lex} t)$.
($\lg(s)$ désigne la longueur de la suite s.)

4. Finitude de Dedekind

On rappelle qu'un ensemble est fini s'il est en bijection avec un ordinal fini, et qu'un ordinal α est fini si tout ordinal $\beta \leq \alpha$ non vide possède un prédécesseur. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

On dit qu'un ensemble x est D-fini s'il n'existe pas de bijection de x dans une de ses parties propres (il est D-infini sinon).

1 Montrer qu'un ensemble est fini est D-fini. En supposant l'axiome du choix, montrer la réciproque.

On ne suppose désormais plus l'axiome du choix.

2 Montrer qu'un ensemble x est D-infini si et seulement si il possède un sous-ensemble dénombrable (*i.e.* en bijection avec ω).

3 Montrer que l'union, le produit de deux ensembles D-finis sont D-finis.

4 Montrer que la réunion d'une famille D-finie d'ensembles D-finis est D-finie.

5 Montrer que pour tout ensemble infini x, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ est D-infini.

5. Paradoxe de Skolem

1 On suppose que la théorie ZF est consistante. Montrer qu'elle admet un modèle dénombrable $\mathcal{M}$.

2 Soit x une ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : x \to \mathcal{P}(x)$. (théorème de Cantor)

3 En déduire que $\mathcal{M}$ contient des ensembles non dénombrables (ce en quantité non dénombrable...)