# TD 13 : théorie des ensembles

Thomas Chomette

16/01/04

**1. Une opération sur les ordinaux**

1 Montrer qu'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux $\alpha$, $\beta$,

$$\begin{aligned} \alpha \ominus \beta &= 0 \qquad \text{si } \alpha < \beta \\ \beta + (\alpha \ominus \beta) &= \alpha \qquad \text{si } \alpha \geq \beta \end{aligned}$$

Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal $\gamma$ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.

On définit le produit de deux ordinaux $\alpha \cdot \beta$ comme la somme de la famille constante égale à $\alpha$, indexée par $\beta$ : $\alpha \cdot \beta = \sum_{i<\beta} \alpha$

2 Soient $\alpha$ et $\beta$ deux ordinaux ($\beta \neq 0$). Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux $(\gamma, \delta)$ tels que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$. (On pourra d'abord montrer qu'il existe $\gamma'$ tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel $\gamma'$ est un successeur.)

**2. Arithmétique cardinale**

On définit les opérations arithmétiques cardinales par :

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &\overset{\text{def}}{=} Card\left(\lambda \dot{\cup} \mu\right) \\ \lambda \cdot \mu &\overset{\text{def}}{=} Card\,(\lambda \times \mu) \\ \lambda^{\mu} &\overset{\text{def}}{=} Card\,(\{\text{fonctions de } \mu \text{ dans } \lambda\}) \end{aligned}$$

où $\dot{\cup}$ et $\times$ désigne respectivement la somme disjointe et le produit cartésien.

1 Montrer que, si $\lambda$ et $\mu$ sont des cardinaux finis, ces opérations coïncident avec les opérations ordinales.

On définit l'ordre de Gödel $<_{\mathrm{G}}$ sur les couples d'ordinaux par :

$$(\alpha, \beta) <_{\mathrm{G}} (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} & \sup(\alpha, \beta) < \sup(\alpha', \beta') \\ \text{ou} & \\ & \sup(\alpha, \beta) = \sup(\alpha', \beta') \text{ et } \beta < \beta' \\ \text{ou} & \\ & \sup(\alpha, \beta) = \sup(\alpha', \beta') \text{ et } \beta = \beta' \text{ et } \alpha < \alpha' \end{cases}$$

2 Montrer que $<_{\mathrm{G}}$ est un bon ordre sur la classe des ordinaux.

3 Montrer cet ordre sur $\lambda \times \lambda$, où $\lambda$ est un cardinal infini, est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à $\lambda$.

4 En déduire que pour tout cardinal infini $\lambda$, on a $\lambda + \lambda = \lambda \cdot \lambda = \lambda$

5 Soit $\kappa$ un cardinal, et $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ une famille de cardinaux non nuls. Montrer que :

$$\sum_{\alpha\in\kappa}\lambda_\alpha = \sup\left(\kappa, \sup_{\alpha\in\kappa}(\lambda_\alpha)\right)$$

**3. Ordinal de Hartog**

Pour tout ensemble $x$, on définit la classe $\chi(x)$ des ordinaux subpotents à $x$, c'est-à-dire équipotents à une partie de $x$.

1 Montrer que $\chi(x)$ est un ensemble.
[Commencer par montrer que la classe des ordinaux équipotents à un ensemble donné est un ensemble. Utiliser ensuite $\mathcal{P}(x)$]

2 Montrer que $\chi(x)$ est un ordinal, et que c'est le plus petit non subpotent à $x$.

3 En déduire que $\chi(x)$ est un cardinal. Si $\lambda$ est un cardinal, montre que $\chi(\lambda)$ est le plus petit cardinal strictement supérieur à $\lambda$. (On le note $\lambda^+$.)

**4. Cofinalité**

On se place dans un univers satisfaisant ZF + AC.

Un cardinal $\lambda$ est dit régulier si pour tout sous-ensemble $a$ de $\lambda$ de cardinal strictement inférieur à $\lambda$, on a $\sup(a) \in \lambda$.

1 Montrer que tout cardinal fini est régulier, ainsi que $\aleph_0$. Le cardinal $\aleph_\omega$ est-il régulier ?

Pour deux ordinaux $\alpha$ et $\beta$, on dit que $\alpha$ est *cofinal* à $\beta$ s'il existe une fonction $f : \beta \to \alpha$ strictement croissante, dont l'image n'est pas (strictement) majorée dans $\alpha$, c'est-à-dire telle que pour tout $\gamma \in \alpha$, il existe $\delta \in \beta$ tel que $f(\delta) \geq \gamma$.

2 Montrer que, pour tout ordinal $\alpha$, il existe un plus petit ordinal $\beta$ tel que $\alpha$ est cofinal à $\beta$.

On appelle *cofinalité* de $\alpha$ (notée $\mathrm{cof}\,(\alpha)$) le plus petit ordinal auquel $\alpha$ est cofinal.

3 Montrer que, pour tout ordinal $\alpha$, $\mathrm{cof}\,(\alpha)$ est un cardinal. En déduire que, si $\mathrm{cof}\,(\alpha) = \alpha$, alors $\alpha$ est un cardinal.

4 Quels sont les ordinaux de cofinalité 1 ?

5 Montrer que $\mathrm{cof}\,(\mathrm{cof}\,(\alpha)) = \mathrm{cof}\,(\alpha)$ pour tout ordinal $\alpha$.

6 Montrer qu'un cardinal $\lambda$ infini est régulier si et seulement si $\mathrm{cof}\,(\lambda) = \lambda$.

**5. Hypothèse du continu**

On se place dans un univers satisfaisant ZF + AC.

1 **Lemme de König :** Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ deux familles d'ensembles telles que pour tout $i \in \mathrm{I}$ on ait $\overline{\overline{a_i}} < \overline{\overline{b_i}}$ ($\overline{\overline{a}}$ désigne ici le cardinal de $a$). Montrer que le cardinal de la somme disjointe des ensembles $a_i$ est strictement inférieur à celui du produit des ensembles $b_i$.

2 Soit $\kappa$ un cardinal infini, de cofinalité $\rho$. Montrer qu'il existe une famille croissante $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\rho}$ de cardinaux strictement inférieurs à $\kappa$ tels que $\kappa = \sum_{\alpha<\rho}\kappa_\alpha$.

3 En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal $\kappa$, on a $\mathrm{cof}\,(2^\kappa) > \kappa$.

4 En déduire des restrictions à la négation de l'hypothèse du continu...
**N.B.** C'est en fait la seule restriction...