TD 14 : « révisions »

Thomas Chomette

23/01/04

1. Propriété du plongement

Soit $\mathcal{L}$ un langage (dénombrable).

1 Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes. On considère un énoncé $\sigma[b_1, \ldots, b_n]$ de $\mathrm{Diag}_{\mathrm{elem}}(\mathcal{N})$. Montrer que la théorie $\mathrm{Diag}_{\mathrm{elem}}(\mathcal{M}) \cup \{\sigma[b_1, \ldots, b_n]\}$ est consistante.

2 En déduire que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont une extension élémentaire commune. (On pourra utiliser le diagramme élémentaire.)

3 Soit T une théorie complète du langage $\mathcal{L}$. Montrer que toute famille finie de modèles de T peut être plongée élémentairement dans un même modèle de T.

Une théorie T a la « propriété du plongement » si deux modèles de T se plongent toujours dans un troisième modèle de T.

4 Soit S une théorie du langage $\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe une théorie T cohérente ayant la propriété du plongement telle que tout modèle de T est modèle de S.

5 Soit T une théorie ayant la propriété du plongement, σ_1 et σ_2 deux énoncés universels, tels que $\sigma_1 \vee \sigma_2$ est un théorème de T. Montrer que l'un des deux énoncés σ_1, σ_2 est un théorème de T.

6 Montrer la réciproque.

2. Théories existentielles

1 Montrer qu'une théorie T composée exclusivement de formules existentielles est préservée par extension.

2 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et T une théorie sur $\mathcal{L}$. Montrer que l'on peut plonger $\mathcal{M}$ dans un modèle de T si et seulement si tout théorème universel de T est vrai dans $\mathcal{M}$.

3 Soit T une théorie préservée par extension, et Γ l'ensemble des formules existentielles conséquences de T. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de Γ et T' l'ensemble des formules universelles vraies dans $\mathcal{M}$. Montrer que $\mathrm{T} \cup \mathrm{T}'$ est satisfaisable.

4 En déduire que l'on peut plonger un modèle de T dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ élémentairement équivalente à $\mathcal{M}$.

5 En déduire que $\mathcal{M}$ satisfait T. Conclure.

3. Cofinalité

On se place dans un univers satisfaisant ZF + AC.

Un cardinal λ est dit régulier si pour tout sous-ensemble a de λ de cardinal strictement inférieur à λ, on a $\sup(a) \in \lambda$.

1 Montrer que tout cardinal fini est régulier, ainsi que $\aleph_0$. Le cardinal $\aleph_\omega$ est-il régulier ?

Pour deux ordinaux α et β, on dit que α est *cofinal* à β s'il existe une fonction $f : \beta \to \alpha$ strictement croissante, dont l'image n'est pas (strictement) majorée dans α, c'est-à-dire telle que pour tout $\gamma \in \alpha$, il existe $\delta \in \beta$ tel que $f(\delta) \geq \gamma$.

2 Montrer que, pour tout ordinal α, il existe un plus petit ordinal β tel que α est cofinal à β.

On appelle *cofinalité* de α (notée $\mathrm{cof}\,(\alpha)$) le plus petit ordinal auquel α est cofinal.

3 Montrer que, pour tout ordinal α, $\mathrm{cof}\,(\alpha)$ est un cardinal. En déduire que, si $\mathrm{cof}\,(\alpha) = \alpha$, alors α est un cardinal.

4 Quels sont les ordinaux de cofinalité 1 ?

5 Montrer que $\mathrm{cof}\,(\mathrm{cof}\,(\alpha)) = \mathrm{cof}\,(\alpha)$ pour tout ordinal α.

6 Montrer qu'un cardinal λ infini est régulier si et seulement si $\mathrm{cof}\,(\lambda) = \lambda$.

4. Hypothèse du continu

On se place dans un univers satisfaisant ZF + AC.

1 **Lemme de König :** Soient $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in \mathrm{I}}$ deux familles d'ensembles telles que pour tout $i \in \mathrm{I}$ on ait $\overline{\overline{a_i}} < \overline{\overline{b_i}}$ ($\overline{\overline{a}}$ désigne ici le cardinal de a). Montrer que le cardinal de la somme disjointe des ensembles a_i est strictement inférieur à celui du produit des ensembles b_i.

2 Soit κ un cardinal infini, de cofinalité ρ. Montrer qu'il existe une famille croissante $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\rho}$ de cardinaux strictement inférieurs à κ tels que $\kappa = \sum_{\alpha<\rho} \kappa_\alpha$.

3 En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal κ, on a $\mathrm{cof}\,(2^\kappa) > \kappa$.

4 En déduire des restrictions à la négation de l'hypothèse du continu...
N.B. C'est en fait la seule restriction...

5. Technique des sandwiches [Difficile]

1 Soient $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ deux langages, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{L}'$-structure, telles que $\mathcal{A} \underset{\mathcal{L}}{\equiv} \mathcal{B}$. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}'$-extension élémentaire $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A}$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{C}$ (pour le langage $\mathcal{L}$).

2 Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages, et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soit T une théorie complète sur $\mathcal{L}$, T_1 et T_2 deux théories cohérentes sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement, qui contiennent T. Montrer que $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ est cohérente sur $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Pour ceci, on construira deux suites $(\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i\in\omega}$ de modèles de T_1 et T_2 respectivement telles que :

- Pour tout i, $\mathcal{A}_{i+1}$ est une $\mathcal{L}_1$-extension élémentaire de $\mathcal{A}_i$, et $\mathcal{B}_{i+1}$ une $\mathcal{L}_2$-extension élémentaire de $\mathcal{B}_i$.
- Il existe un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{B}_1$.
- Pour tout $i \in \omega$, il existe un $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_i}$-plongement élémentaire de $\mathcal{B}_{i+1}$ dans $\mathcal{A}_{i+1}$, et de $\mathcal{A}_{i+1}$ dans $\mathcal{B}_{i+2}$.

Et l'on considèrera la réunion de ces suites.