TD 2 : Calcul Propositionnel

Thomas Chomette

10/10/03

1. Ensemble des formules

On a défini l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles sur un ensemble de variables P comme le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des mots écrits sur l'alphabet : $\mathcal{L} = \mathrm{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$ et vérifiant :

- $\mathcal{F}$ contient P.
- Si un mot F est dans $\mathcal{F}$, alors le mot $\neg$F également.
- Si $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{F}$ et $\varepsilon = \wedge, \vee, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$, alors $(\mathrm{F}\varepsilon\mathrm{G}) \in \mathcal{F}$.

On défini par récurrence une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{L}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \mathrm{P} \\ \text{et pour tout } n, \\ \quad \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg\mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathcal{F}_n\} \\ \qquad\qquad \cup \{(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}), (\mathrm{F} \vee \mathrm{G}), (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}), (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{G}), \quad \mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{F}_n\} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$

2. Formes normales

Une formule F est dite sous **forme normale disjonctive** (FND) si et seulement si F s'écrit :

$$\mathrm{F} = \bigvee_{1\le i\le m} (\varepsilon_{i1}\mathrm{B}_{i1} \wedge \varepsilon_{i2}\mathrm{B}_{i2} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{ik_i}\mathrm{B}_{ik_i}) \quad \text{où}$$

- m est un entier naturel non nul.
- $k_1, \ldots, k_m$ sont des entiers naturels.
- Pour chaque indice $i \le m$ et $j \le k_i$, B_{ij} est une variable propositionnelle, et ε_{ij} est soit le mot vide, soit le caractère $\neg$.

La formule F est dite sous **forme normale disjonctive canonique** (FNDC) si et seulement si il existe des variables propositionnelles $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, et un sous ensemble X de $\{0,1\}^n$ tel que la formule F s'écrive :

$$\mathrm{F} = \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\mathrm{X}} \left(\bigwedge_{1\le i\le n} \varepsilon_i \mathrm{A}_i \right)$$

où les ε_i désignent là aussi soit le mot vide, soit le caractère $\neg$.

En intervertissant les symbole $\vee$ et $\wedge$, on définit de même les formes normales conjonctives (resp. conjonctives canoniques).

Donner une forme normale disjonctive pour chacune des formules suivantes :

1 $E = (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ Quelle est sa forme normale conjonctive canonique ?

2 $F = (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)$

3 $G = F \wedge (A_n \Rightarrow A_1)$

4 $H = \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (A_i \Rightarrow \neg A_j)$

5 Montrer que les formules $(C \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))))$ et $(C \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ sont logiquement équivalentes.

3. Coffre fort

Un coffre fort est muni de n serrures, et ne peut être ouvert que lorsque les n serrures sont simultanément en position ouverte. Cinq personnes : Alice, Bernard, Christine, Dominique et Emile reçoivent chacun des clés, correspondant à certaines de ces serrures. Quel doit être la valeur de n, et quelles clés doivent avoir nos cinq personnes pour que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans l'une des situations suivantes :

- Présence de Alice et Bernard.
- Présence de Alice, Christine et Dominique.
- Présence de Bernard, Dominique et Emile.

4. Distributions de vérité

Quelles sont les distributions de valeurs de vérité sur $P = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ qui satisfont la formule $F = (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)$?
La formule $G = F \wedge (A_n \Rightarrow A_1)$?
Et pour la formule $H = \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (A_i \Rightarrow \neg A_j)$?

5. Algèbre ?

Soit N un entier naturel et $\{X_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$ des variables propositionnelles. On désigne par A_N la conjonction des formules suivantes :

$$X_0 \,;\, X_m \wedge X_n \Rightarrow X_{m+n} \text{ pour tous } 0 \leq m, n \leq N-1$$

où $m + n$ désigne l'addition modulo N.

1 Quelles sont les distributions de valeurs de vérité qui satisfont A_7 ? Même question pour A_{15}.

2 En déduire une forme normale disjonctive pour A_7 et pour A_{15}.

6. Ensembles indépendants

Un ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel est *indépendant* si pour toute formule $P \in \mathcal{A}$, P n'est pas conséquence de $\mathcal{A} \backslash \{P\}$.

1 Les ensembles suivants sont-ils indépendants ?

$$\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow A\}, \quad \{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \Rightarrow C\},$$
$$\{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C, \neg A \Rightarrow (B \vee C)\}, \quad \{A, B, A \Rightarrow C, C \Rightarrow B\},$$
$$\{A \Rightarrow (B \vee C), C \Rightarrow \neg B, B \Rightarrow (A \vee C), (B \wedge C) \Leftrightarrow B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\}.$$

Ceux qui ne le sont pas ont-ils un sous-ensemble équivalent indépendant ?

2 L'ensemble vide est-il indépendant ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble d'une formule soit indépendant.

3 Montrez que tout ensemble fini de formules admet au moins un sous-ensemble indépendant équivalent.

4 Montrez que pour qu'un ensemble de formules soit indépendant il faut et il suffit que chacun de ses sous-ensembles finis soit indépendant.

5 Exhibez un ensemble infini qui n'admet pas de sous-ensemble indépendant équivalent. Existe-t-il un ensemble indépendant qui lui soit équivalent ?

6 Montrez que pour tout ensemble dénombrable de formules il existe un ensemble indépendant équivalent.

7. Systèmes complets de connecteurs

On rajoute au langage du calcul propositionnel deux symboles $\top$ (constante vrai, vaut 1 pour toute distribution de valeurs de vérités) et $\perp$ (constante faux).

1 Montrer que toute formule écrite avec une unique variable A et les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\top$ et $\perp$ est logiquement équivalente à une des trois formules $\perp$, $\top$, A.

2 Montrer que le système $\{\neg, \Rightarrow\}$ est un système complet de connecteurs.

3 Les ensembles suivants sont-ils des systèmes complets de connecteurs ?

$$\{\Rightarrow, \perp\}; \{\perp, \Leftrightarrow, \vee\}; \{\vee, \wedge\}; \{\perp, \top, \vee, \wedge\}; \{\top, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$$

8. Théorème de Compacité

Le théorème de Tychonoff s'énonce de la façon suivante :

« Tout produit d'espace topologiques compacts est compact »

1 En déduire que, si P désigne un ensemble de variables propositionnelles, l'espace $\{0,1\}^{\mathrm{P}}$ des distributions de valeurs de vérités sur P est compact.

2 Soit F une formule. Montrer que, pour qu'une distribution de valeurs de vérités δ satisfasse F, il suffit de connaître sa valeur en un nombre fini de variables $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$. En déduire que l'ensemble $\Delta(\mathrm{F})$ des distributions de valeurs de vérités qui satisfont F est une réunion finie d'ouverts élémentaires de $\{0,1\}^{\mathrm{P}}$.

3 Montrer qu'il en est de même pour le complémentaire de $\Delta(\mathrm{F})$. En déduire que $\Delta(\mathrm{F})$ est fermé pour la topologie produit.

4 Montrer que, si un ensemble T de formules est contradictoire, alors l'ensemble $\bigcap_{\mathrm{F}\in\mathrm{T}} \Delta(\mathrm{F})$ est vide. Montrer qu'alors on a un sous-ensemble fini T_0 de T tel que $\bigcap_{\mathrm{F}\in\mathrm{T}_0} \Delta(\mathrm{F})$ est vide.

5 En déduire le théorème de compacité du calcul propositionnel.

9. Relation d'ordre

1 Soit $(\mathrm{E}_i, \leq_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ensembles ordonnés, indexée par un ensemble I. Construire un ensemble de formules qui est satisfaisable si et seulement si il existe une relation d'ordre $\leq$ sur $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ qui prolonge tous les ordres $\leq_i$.

2 Construire un ensemble de formules qui est satisfaisable si et seulement si il existe une relation d'ordre *totale* $\leq$ sur $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ qui prolonge tous les ordres $\leq_i$.

3 Soit E un ensemble. En utilisant le théorème de compacité, montrer qu'il existe sur E une relation d'ordre totale.

(4 Peut-on montrer, par cette méthode, l'existence d'un bon ordre sur E ?)