TD 4 : calcul des prédicats

Thomas Chomette

24/10/03

1. Structures, Satisfaction (1)

Le langage égalitaire $\mathcal{L}$ est constitué d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de fonction binaire g. On considère les formules closes suivantes :

$$\mathrm{F}_1 : \exists x \exists y fgxy = fx \qquad \mathrm{F}_2 : \forall x \forall y fgxy = fx$$
$$\mathrm{F}_3 : \exists y \forall x fgxy = fx \qquad \mathrm{F}_4 : \forall x \exists y fgxy = fx$$
$$\mathrm{F}_5 : \exists x \forall y fgxy = fx \qquad \mathrm{F}_6 : \forall y \exists x fgxy = fx.$$

On considère quatre structures dont l'ensemble de base est $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, où g est interprété par l'application $(m, n) \mapsto m + n$, et où f est interprété, respectivement, par :

(i) l'application constante égale à 42 ;

(ii) l'application qui à tout entier associe le reste de sa division euclidienne par 4 ;

(iii) l'application $n \mapsto \min(n^2 + 2, 19)$;

(iv) l'application qui à 1 associe 1 et à $n > 1$ le plus petit diviseur premier de n.

Dans chacune de des quatres $\mathcal{L}$-structures correspondante, indiquer quelles formules sont satisfaites parmis les six formules proposées.

2. Structures, Satisfaction (2)

Dans le langage $\mathcal{L}$ constitué d'un symbole de prédicat unaire P et d'un symbole de prédicat binaire R, on considère les six formules suivantes :

$\mathrm{G}_1 : \exists x \forall y \exists z ((\mathrm{P}x \Rightarrow \mathrm{R}xy) \wedge \mathrm{P}y \wedge \neg \mathrm{R}yz);$

$\mathrm{G}_2 : \exists x \exists z ((\mathrm{R}zx \Rightarrow \mathrm{R}xz) \Rightarrow \forall y \mathrm{R}xy);$

$\mathrm{G}_3 : \forall y (\exists z \forall t \mathrm{R}tz \wedge \forall x (\mathrm{R}xy \Rightarrow \neg \mathrm{R}xy));$

$\mathrm{G}_4 : \exists x \forall y ((\mathrm{P}y \Rightarrow \mathrm{R}yx) \wedge (\forall u (\mathrm{P}u \Rightarrow \mathrm{R}uy) \Rightarrow \mathrm{R}xy));$

$\mathrm{G}_5 : \forall x \forall y ((\mathrm{P}x \wedge \mathrm{R}xy) \Rightarrow ((\mathrm{P}y \wedge \neg \mathrm{R}yx) \Rightarrow \exists z (\neg \mathrm{R}zx \wedge \neg \mathrm{R}yz)));$

$\mathrm{G}_6 : \forall z \forall u \exists x \forall y ((\mathrm{R}xy \wedge \mathrm{P}u) \Rightarrow (\mathrm{P}y \Rightarrow \mathrm{R}zx)).$

Dans chacune des trois $\mathcal{L}$-structures suivantes, indiquer lesquelles sont vraies.

1 L'ensemble de base est $\mathbb{N}$, l'interprétation de R est la relation d'ordre usuelle $\leq$, celle de P est le sous-ensemble des entiers pairs.

2 L'ensemble de base est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, R est interprétée par la relation d'inclusion $\subseteq$, l'interprétation de P est le sous-ensemble constitué des parties finies de $\mathbb{N}$.

3 L'ensemble de base est $\mathbb{R}$, R est interprétée par l'ensemble des couples (a, b) tels que $b = a^2$, P par le sous-ensemble des nombres rationnels.

3. Modèles

On considère le langage $\mathcal{L}$ composé de deux symboles de fonction unaire f et g. Donner un modèle pour chacune des six formules suivantes :

$$\mathrm{F}_1 \wedge \neg \mathrm{F}_2; \quad \mathrm{F}_2; \quad \neg \mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_3; \quad \neg \mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_4; \quad \neg \mathrm{F}_3 \wedge \neg \mathrm{F}_4 \wedge \mathrm{F}_5; \quad \neg \mathrm{F}_5$$

où les formules $(\mathrm{F}_i)_{i \leq 5}$ sont :

$\mathrm{F}_1 : \ \forall x f x = g x$ $\qquad$ $\mathrm{F}_2 : \ \forall x \forall y f x = g y$ $\qquad$ $\mathrm{F}_3 : \ \forall x \exists y f x = g y$
$\mathrm{F}_4 : \ \exists x \forall y f x = g y$ $\qquad$ $\mathrm{F}_5 : \ \exists x \exists y f x = g y$

4. Satisfaction dans les structures

Dans chacun des cas suivants, on considère un langage égalitaire $\mathcal{L}$ et deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Exhiber, lorsque c'est possible, une formule close de $\mathcal{L}$ vraie dans $\mathcal{A}$ et fausse dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle; \\
\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, = \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, = \rangle; \\
\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle; \\
\mathcal{L} = \{\otimes\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \times \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap \rangle; \\
\mathcal{L} = \{c, \otimes\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 1, \times \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, 1, \times \rangle; \\
\mathcal{L} = \{c, d, \oplus, \otimes\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \times \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \times \rangle; \\
\mathcal{L} = \{\mathrm{R}, c, \otimes\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \leq, 0, \times \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, \leq, 0, \times \rangle; \\
\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}; & \mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \equiv_2 \rangle; & \mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, \equiv_3 \rangle.
\end{array}$$

5. Variables libres et variables liées

1 La formule $\mathrm{F} \Rightarrow \forall v \mathrm{F}$ est-elle universellement valide pour toute formule F ?

2 Donnez un exemple montrant que la restriction *w n'est pas libre dans* F est nécessaire pour pouvoir affirmer que $\forall v \mathrm{F} \Leftrightarrow \forall w (\mathrm{F}[v \backslash w])$.

3 Montrer que si deux formules sont universellement équivalentes, il en est de même de leurs clôtures universelles, mais que la réciproque n'est pas vraie.

6. Axiomatique et axiomatique finie

Soit $\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}$, avec R un symbole de relation binaire. Soit K_0 la classe des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} = \langle \mathrm{M}, \mathrm{R}^{\mathcal{M}} \rangle$ telles que :

- $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence,
- $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ a une infinité de classes d'équivalence,
- toutes les classes d'équivalence de $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ sont infinies.

1 Donner une théorie T_0 qui axiomatise la classe K_0.

2 Montrer qu'une théorie T est équivalente à une théorie finie si et seulement si T est équivalente à une de ses sous-théories finies.

3 La classe K_0 est-elle finiment axiomatisable ?

7. Théories complètes

Soit T une théorie (ensemble d'énoncés). Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T est complète (tous ses modèles sont élémentairement équivalents).
- Pour tout énoncé σ, $\mathrm{T} \vdash \sigma$ si et seulement si il existe un modèle de T qui satisfait σ.
- Pour tout énoncé σ, $\mathrm{T} \vdash \sigma$ ou $\mathrm{T} \vdash \neg\sigma$.