TD 6 : calcul des prédicats

Thomas Chomette

14/11/03

1. Structures isomorphes

Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire dénombrable.

1 Montrer qu'il y a au plus 2^ω $\mathcal{L}$-structures dénombrables et non isomorphes.

2 À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur le langage $\mathcal{L}$ y-a-t'il exactement 2^ω $\mathcal{L}$-structures dénombrables non isomorphes ?

3 Montrer qu'il y a au plus 2^ω $\mathcal{L}$-structures à équivalence élémentaire près.

4 On suppose que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de prédicat. Montrer que, pour λ cardinal suffisament grand, il y a strictement plus de 2^ω $\mathcal{L}$-structures non isomorphes et de cardinal λ. En déduire qu'il y a des $\mathcal{L}$-structures de cardinal λ élémentairement équivalentes et non isomorphes.

2. Sous-structures

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure avec ensemble de base $|\mathcal{M}|$.

1 Soit $\mathrm{A} \subseteq |\mathcal{M}|$ non vide. Montrer qu'il existe une unique sous-structure $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ telle que :

- A est inclus dans l'ensemble de base $|\mathcal{A}|$ de $\mathcal{A}$;
- toute sous-structure $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ telle que $\mathrm{A} \subseteq |\mathcal{N}|$ est une extension de $\mathcal{A}$.

2 On suppose que $\mathcal{L}$ ne contient pas de symbole de fonction d'arité non-nulle. Quelle est-alors la sous-structure engendrée par une partie A ?

3 Une sous-structure $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est dite *de type fini* lorsqu'elle est engendrée par une partie finie de $|\mathcal{M}|$. Montrer qu'une formule

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \mathrm{F}[x_1, \dots, x_n]$$

(où $n \geq 0$ et F n'a pas de quantificateurs) est satisfaite dans $\mathcal{M}$ si et seulement si elle est satisfaite dans toute sous-structure de type fini de $\mathcal{M}$.

4 La propriété précédente est-elle vraie pour une formule quelconque ?

5 Soit T une théorie du langage $\mathcal{L}$. Montrer que $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de T si et seulement si toute sous-structure de type fini de $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de T.

3. Préservation de la vérité de théories

Une formule F est dite *universelle* si elle s'écrit sous la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \mathrm{G}[x_1, \dots, x_n]$ où $\mathrm{G}[x_1, \dots x_n]$ est une formule sans quantificateurs. Si l'on remplace le symbole $\forall$ par le symbole $\exists$ dans la définition précédente, on parle de *formule existentielle.*

Soit donc T une théorie d'un langage $\mathcal{L}$.

1 Montrer que si T n'est composée que de formules universelles, alors toute sous-structure d'un modèle de T est encore modèle de T.

2 Montrer que si T n'est composée que de formules existentielles, alors toute extension d'un modèle de T est encore modèle de T.

On va enfin s'intéresser à un résultat un peu plus complexe de préservation : la préservation par « union de chaîne ». Soit I un ensemble ordonné filtrant, *i.e.* tel que pour tous éléments i et j de I, il existe un élément k dans I tel que $i \leq k$ et $j \leq k$. Soient $(\mathcal{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, d'ensembles de base $(\mathrm{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

3 On suppose que pour tous $i, j \in \mathrm{I}$, si $i \leq j$ alors $\mathcal{M}_i$ est sous-structure de $\mathcal{M}_j$. Montrer qu'il existe sur $\bigcup\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que pour tout i, $\mathcal{M}_i$ est sous-structure de $\mathcal{M}$.

4 Soit F une formule qui s'écrit sous la forme :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \mathrm{G}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

On suppose F vraie dans tous les $\mathcal{M}_i$. Montrer que $\mathcal{M}$ satisfait encore F.

5 Montrer que si l'on suppose de plus que pour tous $i \leq j$, $\mathcal{M}_i$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}_j$, alors les $\mathcal{M}_i$ sont sous-structures élémentaires de $\mathcal{M}$.

4. Ordres discrets

Soit un langage $\mathcal{L} = \{0, s, \leq\}$, où 0 est un symbole de constante, s un symbole de fonction unaire, et $\leq$ une relation binaire. Soit $\mathcal{M}_0$ la $\mathcal{L}$-structure $\langle \mathbb{N}, 0, s, \leq \rangle$, où les symboles de $\mathcal{L}$ ont leur interprétation naturelle (s est la fonction successeur). Soit T l'ensemble des énoncés vrais dans $\mathcal{M}_0$.

1 Si $\mathcal{M}$ désigne un modèle de T, montrer que l'on peut plonger $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{M}$, et que pour tout élément m de M, l'ensemble des majorants stricts de m admet un plus petit élément.

2 Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T dénombrable, mais non isomorphe à $\mathcal{M}_0$. Montrer que $\leq$ n'est alors pas un bon ordre sur $\mathcal{M}$. (**N.B.** Un bon ordre est un ordre total pour lequel toute partie non vide a un plus petit élément.)

3 Soit $\langle \mathrm{E}, \leq \rangle$ un ensemble dénombrable muni d'un ordre total. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ dénombrable de T et une partie X de l'ensemble de base M de $\mathcal{M}$ telle que $\langle \mathrm{E}, \leq \rangle$ soit isomorphe à X muni de la relation d'ordre de $\mathcal{M}$.

5. Formules sur un corps

Soit σ un énoncé de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \mathrm{F}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, supposé vrai dans tout corps fini (σ est exprimé dans le langage des corps).

1 Soit p un nombre premier, et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_p}$, la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. En considérant un corps fini bien choisi, montrer que

$$\overline{\mathbb{F}_p} \models \exists y_1 \dots \exists y_m \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow a_1, \dots, x_n \rightsquigarrow a_n, y_1, \dots, y_m]$$

2 En déduire que $\overline{\mathbb{F}_p} \models \sigma$

3 On admet que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est complète. Montrer que σ est satisfait dans tout corps algébriquement clos.

4 Application : montrer que toute fonction polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ injective est aussi surjective.