TD 7 : calcul des prédicats

Thomas Chomette

21/11/03

1. Ensembles définissable 1/2 (Cori-Lascar)

Soit $\mathcal{L}$ un langage (pas nécessairement égalitaire), et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, d'ensemble de base M. On rappelle qu'un sous-ensemble A de M^k ($k \in \mathbb{N}$) est **définissable** s'il existe une formule à k variables libres $\mathrm{F}[x_1, \ldots, x_k]$ telle que, pour tous éléments $a_1, \ldots, a_k$ de M, on ait :

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \mathrm{F}[x_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, x_k \rightsquigarrow a_k]$$

1 Soit $\mathcal{L}$ le langage égalitaire constitué d'un seul symbole de fonction unaire. On considère les $\mathcal{L}$-structures suivantes :

$$\mathcal{M}_1 = \langle \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, x \mapsto x+1 \rangle;$$
$$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, x \mapsto x+2 \rangle.$$

Déterminer les sous-ensembles définissables de l'ensemble de base.

2 Soit $\mathcal{L}$ le langage égalitaire constitué d'un seul symbole de fonction binaire. On considère les $\mathcal{L}$-structures suivantes :

$$\mathcal{N}_1 = \langle \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, (x,y) \mapsto x+y \rangle;$$
$$\mathcal{N}_2 = \langle \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, (x,y) \mapsto x+y \rangle;$$
$$\mathcal{N}_3 = \langle \mathbf{R}, (x,y) \mapsto xy \rangle.$$

Déterminer les sous-ensembles définissables de l'ensemble de base.

2. Ensembles définissables 2/2

1 Montrer qu'une partie A définissable est préservée (dans son ensemble) par tout automorphisme de $\mathcal{M}$.

2 On considère le langage $\mathcal{L}$ constitué du symbole d'égalité et d'une suite de constantes $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$. On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $\mathbb{Z}$, et dans laquelle chaque constante c_n est interprétée par l'entier n.

Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ sont préservés par tous les automorphismes de $\mathcal{M}$. Ces ensembles sont-ils définissables ?

3 On considère le langage $\mathcal{L}$ ayant pour unique symbole un symbole de relation S d'arité 3, et la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ d'ensemble de base $\mathbb{Z}$, et dans lequel S est donné par son graphe :

$$\overline{\mathrm{S}} = \{(1,2,3); (1,-2,-3); (-1,-2,3); (-1,2,-3)\}$$

Montrer que tout automorphisme de $\mathcal{M}$ admet un point fixe. (on pourra examiner les éléments $-3. -2, -1, 1, 2, 3$).

Montrer qu'aucun point n'est définissable (*i.e.* aucun singleton ne l'est) dans cette structure.

3. Réels

1 On considère le langage $\mathcal{L}$ constitué d'une seule relation binaire R. Dans la $\mathcal{L}$-structure dont l'ensemble de base est $\mathbb{R}$, muni de la relation d'ordre canonique, montrer que, pour tous éléments a et b, il existe un automorphisme qui envoie a sur b. Montrer que, pour $a < b$ et $c < d$ des réels, il existe un automorphisme qui envoie a sur c et b sur d.

2 Quels sont les parties de $\mathbb{R}$ définissables ? Les parties de $\mathbb{R}^2$ définissables ?

3 On se place ici dans le cadre du langage des anneau $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, .\}$, et l'on considère le modèle $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $\mathbb{R}$, muni des opérations naturelles.

Montrer que tout $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ fixe tous les rationnels.

4 Montrer que l'on peut définir la relation d'ordre naturelle dans le langage $\mathcal{L}$. En déduire que le seul $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ est l'identité.

5 Toute partie de $\mathbb{R}$ est-elle pour autant définissable ?

6 On considère maintenant le modèle $\mathcal{N}$ dont l'ensemble de base est $\mathbb{C}$, muni des opérations naturelles. Soient α et β deux nombres transcendants. Montrer que l'on peut construire un $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{N}$ qui envoie α sur β. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{N}$.

4. Préservation par sous-structure

1 Soit $\mathcal{L}$ un langage, T une théorie. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T, avec $\mathcal{M}$ sous-structure de $\mathcal{N}$. Soit σ un énoncé universel vrai dans $\mathcal{N}$. Montrer que $\mathcal{M} \models \sigma$.

2 Exemples : montrer qu'un sous-anneaux d'un anneau intègre est intègre, qu'un sous-groupe d'un groupe sans torsion est sans torsion.

5. Plongements simultannés

1 Soit $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes. Montrer que la théorie $\mathrm{D}_{elem}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{D}_{elem}(\mathcal{N})$ est satisfaisable.

2 En déduire l'existence d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ telle que les deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{A}$.

3 Soient $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}$-structures toutes élémentairement équivalentes. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que, pour tout entier i, $\mathcal{M}_i$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{M}$.