TD 8 : calcul des prédicats (complétude)

Thomas Chomette

28/11/03

1. Démonstrations formelles

Montrer, sans utiliser le théorème de complétude, que

1. $\mathrm{F}, \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G} \mid\!\sim \mathrm{G}$;
2. $\mathrm{F} \mid\!\sim \mathrm{F} \vee \mathrm{G}$;
3. $\mathrm{F}, \mathrm{G} \mid\!\sim \mathrm{F} \wedge \mathrm{G}$;
4. $\mid\!\sim \forall v\mathrm{F} \Rightarrow \exists v\mathrm{F}$

2. Généralisation

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$.

1. Montrer qu'il existe une application $\phi : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ qui satisfait, pour $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$:
   (a) Si F commence par un quantificateur universel, alors $\phi(\mathrm{F}) = 0$,
   (b) Si F commence par un quantificateur existentiel, alors $\phi(\mathrm{F}) = 1$,
   (c) Si F est de la forme $\neg\mathrm{G}$, alors $\phi(\mathrm{F}) = 1 - \phi(\mathrm{G})$,
   (d) Si F est de la forme $(\mathrm{G}\alpha\mathrm{H})$, où α est un symbole de connecteur binaire, alors $\phi(\mathrm{F}) = \overline{\alpha}(\phi(\mathrm{G}), \phi(\mathrm{H}))$, où $\overline{\alpha} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ est l'application correspondant canoniquement au connecteur α.
2. Montrer que si F est un axiome, alors $\phi(\mathrm{F}) = 1$.
3. Montrer que si $\phi(\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}) = 1$ et $\phi(\mathrm{F}) = 1$, alors $\phi(\mathrm{G}) = 1$.
4. Montrer que si F admet une démonstration qui ne fait pas appel à la règle de généralisation, alors $\phi(\mathrm{F}) = 1$.
5. En déduire qu'il existe des formules démontrables qui ne sont pas démontrables *sans* la règle de généralisation.

3. Démonstrations par coupure

On s'intéresse à un ensemble de formules du calcul propositionnel, appelé ensemble des *clauses*. Une clause est une formule qui peut s'écrire sous la forme :

$$(\neg\mathrm{A}_1 \vee \neg\mathrm{A}_2 \vee \cdots \vee \neg\mathrm{A}_n \vee \mathrm{B}_1 \vee \mathrm{B}_2 \vee \cdots \vee \mathrm{B}_m) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ sont des variables propositionnelles.

On notera dans la suite $(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n) \Rightarrow (\mathrm{B}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{B}_m)$ la formule précédente. $(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n)$ s'appelle la *prémisse* de la clause, $(\mathrm{B}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{B}_m)$ est sa *conclusion*.

On définit deux règles de déduction syntaxique sur l'ensemble des clauses : la *règle de simplification*, qui consiste à supprimer toutes les occurences sauf une d'une variable propositionnelle apparaissant plusieures fois dans la prémisse d'une clause (ou dans sa conclusion). La seconde règle est la *déduction par coupure*. On dit qu'une clause $\mathcal{E}$ se déduit par coupure des clauses

$$\mathcal{C} = (\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n) \Rightarrow (\mathrm{B}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{B}_m)$$

et

$$\mathcal{D} = (\mathrm{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{C}_k) \Rightarrow (\mathrm{D}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{D}_l)$$

S'il existe deux indices $i \leq m$ et $j \leq k$ tels que $\mathrm{B}_i = \mathrm{C}_j$, et si la clause $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n \wedge \mathrm{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{C}_{j-1} \wedge \mathrm{C}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{C}_k) \\ \Rightarrow\ &(\mathrm{B}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{B}_{i-1} \vee \mathrm{B}_{i+1} \vee \cdots \vee \mathrm{B}_m \vee \mathrm{D}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{D}_l) \end{aligned}$$

(La prémisse et la conclusion de $\mathcal{E}$ sont respectivement la conjonction des prémisses et la disjonction des conclusions de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, dans lesquelles on supprime la variable propositionnelle commune $\mathrm{B}_i = \mathrm{C}_j$.)

1. Montrer que si une $\mathcal{E}$ se déduit par coupure de deux clauses $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{E}$ est conséquence sémantique de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (*i.e.* toute distribution de valeurs de vérités satifaisant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ satisfait aussi $\mathcal{E}$). Idem pour la règle de simplification.

   [Examiner au contraire les distributions qui valent 0 en $\mathcal{E}$.]

Une *démonstration par coupure* d'une clause $\mathcal{A}$ à partir d'un ensemble de clauses Γ est alors une suite de clauses $(\mathcal{D}_i)_{i \leq n}$ telle que $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}$ et pour tout $i \leq n$, la clause $\mathcal{D}_i$ est soit dans Γ, soit se déduit par simplification à partir d'une clause $\mathcal{D}_j$ ($j < i$), soit se déduit par coupure de deux clauses $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}_k$ ($j, k < i$).

Enfin, on dit qu'un ensemble Γ de clauses est *réfutable* s'il existe à partir de Γ une démonstration par coupures de la clause vide (clause toujours fausse).

2. Montrer qu'un ensemble de clauses Γ réfutable n'est pas satisfaisable.

Soit Γ un ensemble fini de clauses, non satisfaisable. On veut montrer que Γ est réfutable. On suppose que Γ ne contient pas la clause vide (sinon Γ est bien sûr réfutable), ni de tautologie, et qu'enfin toutes les clauses de γ sont simplifiées.

3. Soit A une variable propositionnelle n'apparaissant dans la prémisse d'aucune clause de Γ, et soit Γ' l'ensemble des clauses de Γ dans lesquelles la variable A n'apparait pas. Montrer que Γ' n'est pas satisfaisable. Idem avec les conclusions.
4. Montrer par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles que Γ est réfutable. En déduire que tout ensemble de clauses non satisfaisable est réfutable.
5. Soit Γ l'ensemble de clauses $\{(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{C}\ ;\ \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}\ ;\ (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \Rightarrow\ ;\ \Rightarrow \mathrm{A}\}$. Donner une réfutation de Γ. Déduire la clause $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}$ des deux premières, et montrer que l'ensemble n'est plus réfutable si l'on remplace ces deux premières clauses par la clause $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}$.
6. **Dessert :** Soit S un ensemble de 7 clauses. On suppose que, dans chacune de ces clauses, apparaissent au moins 3 variables propositionnelles distinctes. Montrer que S est satisfaisable.