TD 9 : arithmétique de Peano

Thomas Chomette

5/12/03

1. Schéma d'induction (Cori-Lascar)

On rappelle que, sur le langage de l'arithmétique $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$, les *axiomes de Peano* sont les 7 axiomes suivants $A_1, \ldots, A_7$, ainsi qu'une infinité d'axiomes, que l'on appellera *axiomes d'induction* :

A_1 : $\forall x\ \neg sx = 0$	A_2 : $\forall x \exists y\ (\neg x = 0 \Rightarrow sy = x)$
A_3 : $\forall x \forall y\ (sx = sy \Rightarrow x = y)$	A_4 : $\forall x\ x + 0 = x$
A_5 : $\forall x \forall y\ (x + sy = s(x + y))$	A_6 : $\forall x\ x \cdot 0 = 0$
A_7 : $\forall x \forall y\ (x \cdot sy = (x \cdot y) + x)$	

Pour toute formule $F[x, x_1, \ldots, x_n]$ à $n + 1$ variables libres, l'axiome d'induction associé est la formule :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Big((F[0, x_1, \ldots, x_n] \wedge \forall x\,(F[x, x_1, \ldots, x_n] \Rightarrow F[sx, x_1, \ldots, x_n])) \Rightarrow \forall x F[x, x_1, \ldots, x_n] \Big)$$

On note $\mathcal{AP}$ l'ensemble des axiomes de Peano, $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des axiomes $A_1, \ldots, A_7$.

Soit X un ensemble non vide, f une fonction de $X \times X$ dans X. On définit sur $\mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z})$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

- $\mathcal{M}$ est une extension de $\mathbb{N}$ (muni des opérations naturelles).
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$, alors $sa = (x, n + 1)$;
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $a + m = m + a = (x, n + m)$;
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$ et $b = (y, m) \notin \mathbb{N}$, alors $a + b = (x, n + m)$;
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors $a \cdot m = (x, n \cdot m)$; et $a \cdot 0 = 0$;
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $m \cdot a = (x, m \cdot n)$;
- si $a = (x, n) \notin \mathbb{N}$ et $b = (y, m) \notin \mathbb{N}$, alors $a \cdot b = (f(x, y), n \cdot m)$.

1 Montrer que $\mathcal{M}$ est modèle de $\mathcal{P}_0$.

2 Montrer qu'aucune des propriétés suivantes n'est conséquence de $\mathcal{P}_0$:
- $\forall x \forall y\ x + y = y + x$ (l'addition est commutative) ;
- $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (la multiplication est associative) ;
- $\forall x \forall y\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y)$ ($\leq$ est antisymétrique, où $x \leq y$ est par définition la formule $\exists z\ z + x = y$) ;
- $\forall x\ 0 \cdot x = 0$.

3 On va prouver que la première de ces formules est vraie dans $\mathcal{AP}$. Montrer successivement, en utilisant les axiomes de $\mathcal{AP}$:
- $\mathcal{AP} \vdash \forall x\ x + 0 = 0 + x$
- $\mathcal{AP} \vdash \forall x \forall y\ s(y + x) = sy + x$
- En appliquant le schéma de récurrence, $\mathcal{AP} \vdash \forall x \forall y\ x + y = y + x$

2. Modèles non standards

Soit $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ le langage de l'arithmétique, et $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{AP}$ (axiomatique de Peano).

1 Montrer que la relation définie par « $x \leq y$ si et seulement si il existe un élément z tel que $z + x = y$ » est une relation d'ordre totale sur $|\mathcal{M}|$.

2 Montrer dans $\mathcal{AP}$ l'équivalence suivante :

$$\forall x \forall y \ \ (x \leq y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } sx \leq y))$$

Et dans $\mathcal{P}_0$? ? ?

3 On rappelle que tout modèle de $\mathcal{AP}$ contient une sous-structure isomorphe à $\mathbb{N}$. Si c'est une sous-structure stricte, on dit que $\mathcal{M}$ est non standard. Montrer que $\mathcal{AP}$ a un modèle dénombrable et non standart.

Désormais, $\mathcal{M}$ désigne un modèle dénombrable et non standard de $\mathcal{AP}$.

4 Montrer que l'ensemble ordonné $\left(|\mathcal{M}|, \leq^{\mathcal{M}}\right)$ est isomorphe à $(\mathbb{N} + \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq)$.

5 Montrer qu'une formule $\mathrm{F}[x]$ à une variable libre x satisfaite par une infinité d'entiers standards dans $\mathcal{M}$ est nécessairement satisfaite par au moins un entier non standard de $\mathcal{M}$.

En déduire que $\mathbb{N}$ n'est pas définissable (sur vide) dans $\mathcal{M}$.

3. Conjecture de Goldbach

Soit $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ le langage de l'arithmétique, et F l'énoncé « tout entier pair est la somme de deux nombres premiers ».

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{AP}$. Un élément a de $|\mathcal{M}|$ est dit *anormal* si a est non nul et pour tout entier standart non nul n, il existe un élément b de $|\mathcal{M}|$ tel que $a = bn$. Le modèle $\mathcal{M}$ est dit *anormal* s'il contient un élément anormal.

1 Montrer qu'il existe un modèle anormal $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{AP}$.

2 Soit $\mathrm{A}(\mathcal{M}_1)$ l'ensemble des éléments anormaux de $\mathcal{M}_1$. Montrer qu'il existe une sous-structure $\mathcal{M}_2$ de $\mathcal{M}_1$, modèle de $\mathcal{P}_0$, et dont l'ensemble de base est :

$$\mathbb{N} \cup \{a + k, \quad a \in \mathrm{A}(\mathcal{M}_1), k \in \mathbb{Z}\}$$

N.B. *A priori*, rien ne dit que $\mathcal{M}_2$ est modèle de $\mathcal{AP}$...

Montrer que $\mathrm{A}(\mathcal{M}_2) = \mathrm{A}(\mathcal{M}_1)$.

3 Quels sont les nombres premiers de $\mathcal{M}_2$ autres que ceux de $\mathbb{N}$? Montrer que la somme de deux éléments anormaux est anormale.

4 Montrer que $\mathcal{M}_2$ ne satisfait pas F.

4. Sous-structures élémentaires

Soient $\mathcal{M}_2$ un modèle de $\mathcal{AP}$ et $\mathcal{M}_1$ une sous-structure de $\mathcal{M}_2$ (pour le langage de l'arithmétique). On suppose que la sous-structure $\mathcal{M}_1$ est close par fonction définissable, c'est-à-dire que pour tout entier k, si une formule $\phi(y_1, \ldots, y_k, v)$ définit une fonction f de M_2^k dans M_2, alors pour tout $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{M}_1^k$ on a $f(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{M}_1$.
Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}_2$.