CHAPITRE X

Les ensembles constructibles

RÉSUMÉ. • *De même qu'on introduit le sous-corps premier d'un corps K comme la clôture de $\{0,1\}$ par les opérations de corps, on introduit un plus petit modèle intérieur $\mathbf{L}$ d'un modèle de* ZF *comme clôture des ordinaux par les* opérations de Gödel. *Les éléments de $\mathbf{L}$ sont appelés les ensembles* constructibles.
• *La propriété d'être un ensemble constructible est* absolue, *c'est-à-dire préservée par passage à un modèle intérieur. En particulier, on a $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.*
• *Le modèle $\mathbf{L}$ est muni d'un bon ordre canonique, et il satisfait* AC. *On en déduit que* ZF *ne prouve pas* $\neg$AC.
• *Le modèle $\mathbf{L}$ admet une stratification par des ensembles L_α analogues aux V_α, où $L_{\alpha+1}$ est l'ensemble des parties de L_α appartenant à la clôture de L_α par les opérations de Gödel. Toute partie constructible de L_α appartient à un ensemble L_β avec $\beta < (\alpha^+)^{\mathbf{L}}$, et il en résulte que $\mathbf{L}$ satisfait* HCG. *On en déduit que* ZF *ne prouve pas* $\neg$HCG.
• *Tout énoncé d'arithmétique prouvable à partir de* ZF+AC+HCG *est prouvable à partir de* ZF.
• *Dans le modèle $\mathbf{L}$, il existe un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui est projection de complémentaire de projection de borélien et n'est pas Lebesfue mesurable.*
• *Le modèle $\mathbf{L}$ satisfait les principes combinatoires $\diamondsuit_\kappa$ et $\square_\kappa$.*
• *Quoique permettant de décider de nombreuses questions, le système* ZF+$\mathbf{V}$=$\mathbf{L}$ *ne paraît pas constituer un cadre universel satisfaisant pour la théorie des ensembles car il exclut de nombreuses options.*

► On montre ici que tout modèle de la théorie ZF admet un plus petit modèle intérieur, formé par les ensembles dits constructibles, et traditionnellement noté $\mathbf{L}$. On établit que le modèle $\mathbf{L}$ satisfait l'axiome du hoix et l'hypothèse du continu généralisée, ce qui permet de déduire que, si le système ZF n'est pas contradictoire, il en est de même du système ZF+AC+HCG. La démonstration des propriétés du modèle $\mathbf{L}$ repose sur la possibilité d'énumérer les ensembles constructibles de façon explicite, et elle comporte à la fois des aspects algébriques (clôture par les opérations de Gödel) et des aspects logiques (propriétés de réflexion et d'absoluité).

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la première section, on définit les opérations de Gödel, qui sont huit opérations ensemblistes simples, on définit la classe $\mathbf{L}$ comme la clôture des ordinaux par les opérations de Gödel, et on montre que $(\mathbf{L}, \in)$ est un modèle transitif de ZFC, ce qui permet de déduire que la consistance de ZF entraîne celle de ZFC.

Dans la seconde section, on donne une autre description de la classe $\mathbf{L}$ comme union croissante d'une famille d'ensembles L_α récursivement définis à l'aide notion d'ensemble des parties définissables d'un ensemble. Cette approche permet de décrire de façon plus précise les ensembles constructibles, et, en particulier, de contrôler la complexité des parties de α, et, de là, de montrer que le modèle $\mathbf{L}$ satisfait l'hypothèse généralisée du continu. On déduit que la consistance de ZF entraîne celle de ZFC+HCG, et que tout énoncé d'arithmétique prouvable à partir de ZFC+HCG est prouvable à partir de ZF seul.

Dans la troisième section, on mentionne, en général sans démonstration, quelques résultats ultérieurs mettant en jeu les ensembles constructibles et le modèle $\mathbf{L}$, en particulier le bon ordre canonique de $\mathbf{L}$ et les principes combinatoires $\diamondsuit$ et $\Box$. ◀

▷ *Au chapitre IX, on a établi des résultats de comparaison entre divers systèmes de théorie des ensembles, résultats qu'on peut appeler négatifs puisqu'ils affirment que tel ou tel système ne prouve pas tel ou tel axiome ou que la consistance du premier ne garantit pas celle du second. Par exemple, on a vu que la consistance du système de Zermelo* Z *ne garantit pas celle du système de Zermelo–Fraenkel* ZF.

Le but principal de ce chapitre est d'établir est d'établir un résultat positif, à savoir que la consistance du système ZF *entraîne celle du système* ZF+AC+HCG. *Un tel résultat est important en pratique puisque, sans rien affirmer quant à l'opportunité d'ajouter l'axiome du choix ou l'hypothèse (généralisée) du continu dans les principes de base de la théorie des ensembles, il garantit du moins qu'il n'y a aucun risque technique à le faire : l'adjonction de ces assertions comme axiomes supplémentaires ne risque pas d'introduire de contradiction dans la construction de l'édifice mathématique.*

Le principe de la démonstration, proposée par K. Gödel en 1938, est d'établir qu'à l'intérieur de tout modèle $\mathcal{M}$ de ZF, *il existe un sous-modèle $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ qui est modèle de* ZF+AC+HCG.

La construction est exactement analogue à celle du sous-corps premier d'un corps : à l'intérieur de tout corps K, il existe un plus petit sous-corps K', le sous-corps premier de K, qui est la clôture de $\{0, 1\}$ par les opérations de corps, et qui est toujours commutatif. Son existence montre que, pourvu qu'il existe au moins un corps, il existe un corps commutatif. On peut en déduire que les axiomes des corps ne prouvent pas la non-commutativité de la multiplication.

De la même façon, à l'intérieur de tout modèle $\mathcal{M}$ de ZFC, *il existe un plus petit modèle intérieur $\mathcal{M}'$, qui est la clôture des ordinaux de $\mathcal{M}$ par les opérations dites de Gödel, et qui satisfait toujours* AC *et* HCG. *Comme ci-dessus, on en déduit que les axiomes de* ZF *ne contredisent ni* AC, *ni* HCG. ◁

1. Ensembles constructibles

▶ On introduit les opérations de Gödel, qui sont huit opérations ensemblistes simples comme la différence et le produit d'ensembles, et on montre essentiellement que toute opération ensembliste définissable peut s'exprimer comme une composition d'opérations de Gödel. On établit ensuite le schéma de réflexion, qui est une méthode générale permettant de remplacer la satisfaction dans la classe $\mathbf{V}$ de tous les ensembles (du modèle de référence) par la satisfaction dans un ensemble V_α convenable. Introduisant alors la classe $\mathbf{L}$ comme la clôture des ordinaux par les opérations de Gödel, on montre que $(\mathbf{L}, \in)$ est un modèle transitif de ZF+AC, et on en déduit que, même dans un cadre métamathématique faible, la consistance de ZF entraîne celle de ZFC. ◀

▷ *Plusieurs approches permettent de définir la classe $\mathbf{L}$ des ensembles constructibles. On utilise ici une approche algébrique, qui est conceptuellement très simple, et qui consiste à considérer la clôture des ordinaux par diverses opérations ensemblistes, exactement de la même façon qu'on introduit le sous-corps premier d'un corps comme la clôture de $\{0, 1\}$ par les opérations* *algébriques. Les limitations de cette approche tiennent à ce que l'énumération obtenue est redondante et assez mal structurée, mais elles n'empêchent pas d'établir simplement que* $(\mathbf{L}, \in)$ *est un modèle de* ZFC. ◁

1.1. Opérations de Gödel.

▶ On introduit sous le nom d'opérations de Gödel une liste de huit opérations ensemblistes simples, et on montre que toute opération ensembliste définissable peut s'obtenir comme composition finie d'opérations de Gödel. ◀

▷ *À la différence du cas des structures algébriques, où les opérations sont explicites, la théorie des ensembles est au départ donnée comme ne mettant en jeu que la relation d'appartenance, ce qui ne mène directement à aucune notion exploitable de clôture. Mais on sait que, dans le contexte de* ZF, *de nombreuses opérations ensemblistes, telles que l'union, l'intersection ou le produit peuvent être définies, le système* ZF *(ou un fragment de celui-ci) prouvant l'existence et l'unicité de tous les ensembles mis en jeu. Ce qu'on va voir ici, c'est qu'il existe une liste* ***finie*** *d'opérations ensemblistes simples, les opérations de Gödel, épuisant en un certain sens toutes les possibilités d'opérations ensemblistes.* ◁

Définition 1.1. (opérations de Gödel) On appelle *opérations de Gödel* les huit opérations définies par les formules suivantes :
- $\Gamma_1(a, b) := \{a, b\}$,
- $\Gamma_2(a, b) := a \times b$,
- $\Gamma_3(a, b) := a \setminus b$.
- $\Gamma_4(a) := {=}\restriction_a = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\}$,
- $\Gamma_5(a) := {\in}\restriction_a = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,;\, \boldsymbol{x} \in a \wedge \boldsymbol{y} \in a \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y}\}$,
- $\Gamma_6(a) := \mathrm{Dom}(a)\ (= \{\boldsymbol{x}\,;\, \exists \boldsymbol{y}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in a)\})$,
- $\Gamma_7(a) := \{(\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}))\,;\, (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \in a\}$,
- $\Gamma_8(a) := \{(\boldsymbol{y}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}))\,;\, (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \in a\}$.

Les axiomes de ZF, et même simplement de ZF^- (extensionnalité, paire, union, séparation), garantissent que les opérations de Gödel sont bien définies, c'est-à-dire que, pour chaque valeur du ou des arguments, le résultat existe et est unique.

On va montrer que toute opération pouvant être définie dans le système ZF peut s'obtenir par composition d'un nombre fini d'opérations de Gödel. Pour cela, on commence par quelques résultats préparatoires. On rappelle (notation III.3.1) que $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_\mathsf{p})$ est, pour $\mathsf{p} \geqslant 2$, un raccourci pour $(\boldsymbol{x}_1, (\boldsymbol{x}_2, (...(\boldsymbol{x}_{\mathsf{p}-1}, \boldsymbol{x}_\mathsf{p})...)))$.

Lemme 1.2. *Les opérations définies par les formules suivantes sont des compositions d'opérations de Gödel :*
- $\Gamma_9(a) := a^{-1} \quad (= \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\,;\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in a\})$,
- $\Gamma_{10}(a, b) := a \cap b$,
- $\Gamma_{11}(x) := \mathrm{Im}(a) \quad (= \{\boldsymbol{y}\,;\, \exists \boldsymbol{x}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in a)\})$,
- $\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a) := a^\mathsf{p}$, *pour* $\mathsf{p} \geqslant 1$,
- $\Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}(a, b) := \{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^\mathsf{p}\,;\, (\boldsymbol{x}_\mathsf{i}, \boldsymbol{x}_\mathsf{j}) \in b\}$, *pour* $1 \leqslant \mathsf{i} \neq \mathsf{j} \leqslant \mathsf{p}$.

Démonstration. D'abord, en écrivant Γa pour $\Gamma(a)$ quand Γ est unaire, on trouve

$$\Gamma_9(a) = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\,;\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in a\}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_6(\{((\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}),(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}))\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in a\wedge \boldsymbol{z},\boldsymbol{t}\in a\})\\
&= \Gamma_6\Gamma_8(\{(\boldsymbol{z},((\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}),\boldsymbol{t}))\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in a\wedge \boldsymbol{z},\boldsymbol{t}\in a\}),\\
&= \Gamma_6\Gamma_8\Gamma_7(a\times\{(\boldsymbol{t},(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in a\wedge \boldsymbol{t}\in a\})),\\
&= \Gamma_6\Gamma_8\Gamma_7\Gamma_2(a,\{(\boldsymbol{t},(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in a\wedge \boldsymbol{t}\in a\})),\\
&= \Gamma_6\Gamma_8\Gamma_7\Gamma_2(a,\Gamma_7(a\times a))) = \Gamma_6\Gamma_8\Gamma_7\Gamma_2(a,\Gamma_7\Gamma_2(a,a)))
\end{aligned}$$

pour a non vide, et, si a est vide, l'égalité ci-dessus est encore vérifiée. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{10}(a,b) = a\setminus(a\setminus b) = \Gamma_3(a,\Gamma_3(a,b)),\\
&\Gamma_{11}(a) = \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Dom}(a^{-1}) = \Gamma_6\Gamma_9(a).
\end{aligned}$$

Pour les opérations $\Gamma_{\times,\mathsf{p}}$, on a $\Gamma_{\times,1}(a) = a$, et, pour $\mathsf{p}\geqslant 2$,

$$\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a) = a\times\Gamma_{\times,\mathsf{p}-1}(a) = \Gamma_2(a,\Gamma_{\times,\mathsf{p}-1}(a)),$$

d'où le résultat par récurrence sur p. Enfin, pour les opérations $\Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}$, on a toujours

$$\Gamma_{\mathsf{j},\mathsf{i},\mathsf{p}}(a,b) = \{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}},\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}})\in b\} = \{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}},\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}})\in b^{-1}\} = \Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,\Gamma_9(b)),$$

donc il suffit de traiter les cas $\mathsf{i}<\mathsf{j}$. On utilise une récurrence sur $\mathsf{p}\geqslant 2$. Pour $\mathsf{p}=2$, on trouve

$$\Gamma_{1,2,2}(a,b) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in a^2\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in b\} = a^2\cap b = \Gamma_2(a,a)\cap b = \Gamma_{10}(\Gamma_2(a,a),b).$$

Enfin, pour $\mathsf{p}\geqslant 3$, et pour $\mathsf{i}\geqslant 2$ et $\mathsf{j}\geqslant 3$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,b) = a\times\Gamma_{\mathsf{i}-1,\mathsf{j}-1,\mathsf{p}-1}(a,b) = \Gamma_2(a,\Gamma_{\mathsf{i}-1,\mathsf{j}-1,\mathsf{p}-1}(a,b)),\\
&\Gamma_{1,\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,b) = \{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}})\in b\} = \Gamma_7(\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}})\in b\}) = \Gamma_7\Gamma_{,\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,b),\\
&\Gamma_{1,2,\mathsf{p}}(a,b) = \{(\boldsymbol{x},(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))\in a\times(a\times a^{\mathsf{p}-2})\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in b\}\\
&\qquad = \Gamma_7(\{(\boldsymbol{x},(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}))\in a\times(a^{\mathsf{p}-2}\times a)\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in b\})\\
&\qquad = \Gamma_7\Gamma_8(\{(\boldsymbol{z},(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\in a^{\mathsf{p}-2}\times(a\times a)\,;\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in b\}) = \Gamma_7\Gamma_8\Gamma_2(\Gamma_{\times,\mathsf{p}-2}(a),\Gamma_{1,2,2}(a,b)).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3. (valeur) *Pour toute formule ensembliste F à p variables libres, il existe une composition de fonctions de Gödel Γ_{F} telle que, pour tout ensemble a, on a*

$$\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})\} = \Gamma_{\mathsf{F}}(a). \tag{1.1}$$

Démonstration. Appelons *spéciale* une formule F ne mettant en jeu que $\neg$, $\wedge$, et $\exists$, à l'exclusion de $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, et $\forall$, et telle que, de plus, dans toute sous-formule de F de la forme $\exists\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}(\mathsf{G})$, l'indice i est le plus petit des indices de variables apparaissant dans G. Alors toute formule équivaut à une formule spéciale, et il suffit d'établir le résultat pour les formules spéciales. On le fait par récurrence sur la longueur de F. Si F est atomique, alors F est de la forme $\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}=\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}}$ ou $\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}\in\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}}$. Or, on a pour $\mathsf{i}=\mathsf{j}$

$$\begin{aligned}
&\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}{=}\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}})\} = a^{\mathsf{p}} = \Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a),\\
&\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}{\in}\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}})\} = \emptyset = \Gamma_3(a^{\mathsf{p}},a^{\mathsf{p}}) = \Gamma_3(\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a),\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a)),
\end{aligned}$$

puisque l'axiome de fondation entraîne $x\notin x$ pour tout x, et, pour $\mathsf{i}\neq\mathsf{j}$,

$$\begin{aligned}
&\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}{=}\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}})\} = \Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,\Gamma_4(a)),\\
&\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}{\in}\boldsymbol{x}_{\mathsf{j}})\} = \Gamma_{\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{p}}(a,\Gamma_5(a)).
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $\mathsf{F}=\neg\mathsf{G}$, on a

$$\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})\} = a^{\mathsf{p}}\setminus\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{G}(\vec{\boldsymbol{x}})\},$$

et on peut définir Γ_{F} par $\Gamma_{\mathsf{F}}(a) = a^{\mathsf{p}}\setminus\Gamma_{\mathsf{G}}(a) = \Gamma_3(\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a),\Gamma_{\mathsf{G}}(a))$. Pour $\mathsf{F}=\mathsf{G}\wedge\mathsf{H}$, on a de même

$$\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})\} = \{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{G}(\vec{\boldsymbol{x}})\}\cap\{\vec{\boldsymbol{x}}\in a^{\mathsf{p}}\,;\,(a,\in)\models\mathsf{H}(\vec{\boldsymbol{x}})\},$$

et on peut définir Γ_{F} par $\Gamma_{\mathsf{F}}(a) = \Gamma_{\mathsf{G}}(a) \cap \Gamma_{\mathsf{H}}(a) = \Gamma_{10}(\Gamma_{\mathsf{G}}(a), \Gamma_{\mathsf{H}}(a))$. Enfin, pour $\mathsf{F} = \exists \boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}(\mathsf{G})$, il vient, en tenant compte de l'hypothèse que la formule F est spéciale, et donc que $\boldsymbol{x}_{\mathsf{i}}$ est la variable de plus petit indice dans G,

$$\begin{aligned}
&\{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}}\,;\, (a,\in) \models \mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})\}\\
&\quad = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}}\,;\, \exists \boldsymbol{y}{\in}a((a,\in) \models \mathsf{G}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))\}\\
&\quad = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}}\,;\, \exists \boldsymbol{y}{\in}a((\boldsymbol{y},\vec{\boldsymbol{x}}) \in \{(\boldsymbol{y},\vec{\boldsymbol{x}}){\in}a^{\mathsf{p}+1}\,;\, (a,\in) \models \mathsf{G}(\boldsymbol{y},\vec{\boldsymbol{x}})\})\\
&\quad = \mathrm{Im}(\{(\boldsymbol{y},\vec{\boldsymbol{x}}){\in}a^{\mathsf{p}+1}\,;\, (a,\in) \models \mathsf{G}(\boldsymbol{y},\vec{\boldsymbol{x}})\}),
\end{aligned}$$

et on peut définir Γ_{F} par $\Gamma_{\mathsf{F}}(a) = \Gamma_{11}\Gamma_{\mathsf{G}}(a)$. □

On déduit une version avec paramètres de la proposition 1.3.

Corollaire 1.4. *Pour toute formule ensembliste* F*, il existe une composition de fonctions de Gödel* $\Gamma_{(\mathsf{F},\vec{\boldsymbol{z}})}$ *telle que, pour tout ensemble* a *et tous* $\vec{c}$ *dans* a*, on a*

$$\{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}}\,;\, (a,\in) \models \mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{c})\} = \Gamma_{(\mathsf{F},\vec{\boldsymbol{z}})}(a,\vec{c}). \tag{1.2}$$

Démonstration. On peut supposer que les indices des variables apparaissant dans $\boldsymbol{z}$ sont tous supérieurs à ceux des variables apparaissant dans $\boldsymbol{x}$. Par la proposition 1.3, il existe une composition Γ_{F} d'opérations de Gödel vérifiant $\Gamma_{\mathsf{F}}(a) = \{(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{z}})\,;\, (a,\in) \models \mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{z}})\}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\{(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{c})\,;\, (a,\in) \models \mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{c})\}\\
&\quad = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}}\,;\, (a,\in) \models \mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{c})\} \cap a^{\mathsf{p}} \times \{c_1\} \times ... \times \{c_{\mathsf{r}}\}\\
&\quad = \Gamma_{\mathsf{F}}(a) \cap a^{\mathsf{p}} \times \{c_1\} \times ... \times \{c_{\mathsf{r}}\},\\
&\quad = \mathrm{Im}(...(\mathrm{Im}(\Gamma_{\mathsf{F}}(a) \cap a^{\mathsf{p}} \times \{c_1\} \times ... \times \{c_{\mathsf{r}}\}))...),
\end{aligned}$$

qui s'exprime comme $\Gamma_{11}...\Gamma_{11}\Gamma_{10}(\Gamma_{\mathsf{F}}(a), \Gamma_2(\Gamma_{\times,\mathsf{p}}(a), \Gamma_2(\Gamma_1(c_1,c_1), ...\Gamma_1(c_{\mathsf{r}},c_{\mathsf{r}})...)))$. □

On conclut la section en montrant que toute opération obtenue par composition d'opérations de Gödel est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, et, de là, absolue pour toute classe transitive qui est modèle de ZF^-.

▷ *Il est facile de vérifier que les opérations de Gödel sont définies par des formules* $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$*, et d'en déduire que toute composition d'opérations de Gödel est absolue pour toute classe transitive modèle de* ZF^-*. Dans la suite, on aura besoin du résultat plus précis que toute composition d'opérations de Gödel est elle-même définie par une formule* $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$*, et ceci est moins évident car, en général, les opérations* Δ_0^{T} *ne sont pas closes par composition.* ◁

Lemme 1.5. *Toute opération obtenue par composition d'opérations de Gödel est* $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$.

Démonstration. On montre un résultat plus fort, à savoir que, pour toute composition Γ d'opérations de Gödel:

- (i) la formule $\boldsymbol{y} \in \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})$ est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$;
- (ii) si F est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, il en est de même de $\exists \boldsymbol{y}{\in}\, \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})(\mathsf{F})$ et de $\forall \boldsymbol{y}{\in}\, \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})(\mathsf{F})$;
- (iii) la formule $\boldsymbol{y} = \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})$ est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$;
- (iv) si $\mathsf{F}(\boldsymbol{x})$ est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, il en est de même de $\mathsf{F}(\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}))$.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'opérations composées : il s'agit donc de montrer que, si Γ, Γ' sont des opérations de Gödel ou l'identité et que le résultat de (i)-(iv) vaut pour Γ et Γ', alors il vaut aussi pour $\mathtt{comp}(\Gamma_1, \Gamma, \Gamma')$, ..., $\mathtt{comp}(\Gamma_8, \Gamma)$. Or, pour (i),

- $c \in \Gamma_1(\Gamma(\vec{a}), \Gamma'(\vec{a}))$ équivaut à $c = \Gamma(\vec{a}) \vee c = \Gamma'(\vec{a})$, une disjonction de deux formules qui, dès que Γ et Γ' satisfont (iii), sont $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, donc est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$;

• $c \in \Gamma_2(\Gamma(\vec{a}), \Gamma'(\vec{a}))$ équivaut à $\exists \boldsymbol{x} {\in} \Gamma(\vec{a})\ \exists \boldsymbol{x}' {\in} \Gamma'(\vec{a})\, (c = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'))$, qui est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ si Γ, Γ' satisfont (ii) ;

• $c \in \Gamma_3(\Gamma(\vec{a}), \Gamma'(\vec{a}))$ équivaut à $c \in \Gamma(\vec{a}) \wedge \neg(c \in \Gamma'(\vec{a}))$, qui est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ si Γ, Γ' satisfont (i) ;

• $c \in \Gamma_4(\Gamma(\vec{a}))$ équivaut à $\exists \boldsymbol{x} {\in} \Gamma(\vec{a})(c = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}))$, qui est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ si Γ satisfait (ii) ;

• $c \in \Gamma_5(\Gamma(\vec{a}))$ équivaut à $\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} {\in} \Gamma(\vec{a})(c = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y})$, qui est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ si Γ satisfait (ii) ;

• $c \in \Gamma_6(\Gamma(\vec{a}))$ équivaut à $\exists \boldsymbol{z} {\in} \Gamma(\vec{a})\ \exists \boldsymbol{y} {\in} \boldsymbol{z}\ \exists \boldsymbol{x} {\in} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, c))$, qui est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ si Γ satisfait (ii).

L'argument est analogue pour Γ_7 et Γ_8 (avec des formules illisibles). De même, pour (ii),

• $\exists \boldsymbol{z} {\in} \Gamma_1(\Gamma(\vec{a}), \Gamma'(\vec{a}))(\mathsf{F}(\boldsymbol{z}))$ équivaut à $\mathsf{F}(\Gamma(\vec{a})) \vee \mathsf{F}(\Gamma'(\vec{a}))$, une disjonction de deux formules qui, dès que Γ et Γ' satisfont (iv), sont $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, donc est $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$;

• $\exists \boldsymbol{z} {\in} \Gamma_2(\Gamma(\vec{a}), \Gamma'(\vec{a}))(\mathsf{F}(\boldsymbol{z}))$ équivaut à $\exists \boldsymbol{x} {\in} \Gamma(\vec{a})\ \exists \boldsymbol{x}' {\in} \Gamma'(\vec{a})\, (\mathsf{F}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')))$; *a priori*, $\mathsf{F}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'))$ n'est pas une formule ensembliste, et, si on écrit sans précaution $\exists \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{z}))$, on n'a plus une formule Δ_0 ; en fait, on remarque que la variable $\boldsymbol{z}$ apparaît dans F dans des formules atomiques d'une des quatre formes $\boldsymbol{z} {\in} ...$, $\boldsymbol{z} = ...$, $... {\in} \boldsymbol{z}$, $... = \boldsymbol{z}$), et que, dans chaque cas, il existe une formule Δ_0 qui est ZF^--équivalente à la formule substituée $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') {\in} ...$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = ...$, $... {\in} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, $... = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$: par exemple, $\boldsymbol{y} {\in} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ équivaut à $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\} \vee \boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\}$, puis à son tour à une formule Δ_0. on conclut alors, pour autant que Γ et Γ' satisfassent (ii).

L'argument est similaire pour Γ_3, ..., Γ_8, et pour le cas de $\forall$. Ensuite, le point (iii) résulte de (i) et (ii), car $\boldsymbol{y} = \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})$ équivaut à la conjonction de $\forall \boldsymbol{z} {\in} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{z} \in \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}))$ et de $\forall \boldsymbol{z} {\in} \Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y})$.

Enfin, pour (iv), on remarque que $\boldsymbol{x}$ apparaît dans $\mathsf{F}(\boldsymbol{x})$ sous une ou plusieurs des formes $... {\in} \boldsymbol{x}$, $... {=} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} {\in} ...$, $\boldsymbol{x} {=} ...$, $\exists ... {\in} \boldsymbol{x}$ et $\forall ... {\in} \boldsymbol{x}$, et que, dans chacun des cas, le résultat de la substitution de $\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})$ à $\boldsymbol{x}$ donne une formule $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$ dès que Γ satisfait (i), (ii) et (iii) : les seuls cas pour lesquels l'application de (i), (ii) ou (iii) n'est pas automatique sont $\boldsymbol{x} {=} ...$, qui est ZF^--équivalente à $... {=} \boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{x} {\in} ...$, qui est ZF^--équivalente à $\exists z {\in} ...(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x})$. □

Enfin, on note que les opérations de Gödel (tout comme n'importe quelle famille d'opérations) donnent lieu à une notion de clôture bien définie.

LEMME 1.6. *Pour tout ensemble a, il existe un plus petit ensemble b incluant a et clos par les opérations de Gödel, c'est-à-dire tel que, quels que soient x, y dans b, on ait $\Gamma_i(x, y) \in b$ pour $i = 1, ..., 3$ et $\Gamma_i(x) \in b$ pour $i = 4, ..., 8$.*

DÉMONSTRATION. Comme pour n'importe quelle clôture, on utilise une définition par récursion sur les entiers. Soit $\mathbf{G}$ l'opération telle que $\mathbf{G}(a)$ est

$$a \cup \{\Gamma_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,;\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in a\} \cup \{\Gamma_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,;\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in a\} \cup \{\Gamma_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,;\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in a\}$$
$$\cup \{\Gamma_4(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\} \cup \{\Gamma_5(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\} \cup \{\Gamma_6(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\} \cup \{\Gamma_7(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\} \cup \{\Gamma_8(\boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x} \in a\}.$$

Il existe une suite $(a_n)_{n \in \omega}$ vérifiant $a_0 := a$ et $a_{n+1} := \mathbf{G}(a_n)$ pour $n \geqslant 0$. Soit $b := \bigcup_{n \in \omega} a_n$. Chaque ensemble a_n inclut a, et, par construction, b est clos par chacune des opérations Γ_1, ..., Γ_8. Inversement, tout ensemble incluant a et clos par Γ_1, ..., Γ_8 inclut successivement chaque a_n, donc finalement b. □

DÉFINITION 1.7. (clôture de Gödel) On note $\mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(a)$ la clôture de a par opérations de Gödel.

1.2. Le schéma de réflexion.

▶ On démontre le schéma de réflexion affirmant que, pour toute famille finie de formules ensemblistes F_1, ..., F_n, il existe un ordinal β tel que F_1,..., F_n soient absolues vis-à-vis de V_β, c'est-à-dire telles que $\mathbf{V} \models \mathsf{F}_\mathsf{i}$ équivaut à $V_\beta \models \mathsf{F}_\mathsf{i}$ pour chaque i, ce qu'on exprime aussi en déclarant que V_β reflète chacune des formules F_i. ◀

▷ *Ayant introduit les opérations de Gödel, on se propose de montrer que la clôture des ordinaux par ces opérations est un modèle intérieur de* ZFC. *Pour cela, on aura besoin d'un critère caractérisant les modèles intérieurs en termes de clôture par les opérations de Gödel, et, pour établir un tel critère, on aura besoin d'un résultat technique important, à savoir le schéma de réflexion objet de cette section. Celui-ci permet, pour chaque formule ou ensemble fini de formules, de passer de la satisfaction dans* $(\mathbf{V}, \in)$ *à la satisfaction dans une structure* $(V_\beta, \in)$ *convenable, offrant une méthode pour contourner les limitations dues au théorème de Tarski sur la non-définissabilité de la vérité.*

Le schéma de réflexion peut être vu comme un résultat d'absoluité, mais d'un type complètement différent de ceux de la section IX.2 : dans cette section, on fixe une classe (ou un ensemble) transitive $\mathbf{M}$ *et on cherche des formules* F *qui soient absolues pour* $\mathbf{M}$. *Ici, on considère une (ou des) formule* F *fixée, et on cherche des ensembles* V_β *tels que* F *soit absolue pour* V_β.

La démonstration du schéma de réflexion repose sur les axiomes de remplacement, et le point central est que, si une formule $\forall\vec{\boldsymbol{x}}\,\exists\boldsymbol{y}\,(\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))$ *est satisfaite dans* $\mathbf{V}$, *alors, pour chaque ordinal* α *et chaque choix de* $\vec{a}$ *dans* V_α, *il existe un ordinal* $\alpha' = f(\alpha)$ *tel qu'il existe* b *dans* $V_{\alpha'}$ *satisfaisant* $\mathsf{F}(\vec{a}, b)$. *En itérant et passant à la limite, on trouve un point fixe de la fonction* f, *et de là un ordinal* β *tel que* V_β *satisfait* $\forall\vec{\boldsymbol{x}}\,\exists\boldsymbol{y}\,(\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))$.

Il sera utile pour la suite d'énoncer le résultat sous une forme générale mettant en jeu non pas nécessairement les ensembles V_α, *mais une famille croissante et continue quelconque d'ensembles* M_α, *ce qui conduit à étendre légèrement la notion d'absoluité.* ◁

Dans toute la suite, on se place dans un modèle $\mathcal{M}$ de ZF, au sens de la section IX.1.5.

Définition 1.8. (absolu) Pour $\mathbf{M}_\bullet \subseteq \mathbf{M}$ classes de $\mathbf{V}$, on dit qu'une formule ensembliste $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est *absolue* pour $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M})$ si $(\mathbf{M}_\bullet, \in) \models \mathsf{F}(\vec{a})$ équivaut à $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}(\vec{a})$ [1] pour tout choix de $\vec{a}$ dans $\mathbf{M}_\bullet$.

Une formule F est absolue pour une classe $\mathbf{M}$ au sens de la définition IX.2.4 si et seulement elle est absolue pour le couple $(\mathbf{M}, \mathbf{V})$. On commence par un résultat technique.

Lemme 1.9. *Supposons* $\mathbf{M}_\bullet \subseteq \mathbf{M}$, *et soit* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *une famille de formules de* $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$ *telle que toute sous-formule d'une formule* F_i *est une formule* F_j. *Une condition suffisante pour que* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *soient absolues pour* $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M})$ *est que, pour chaque formule* $\mathsf{F}_\mathsf{i}(\vec{\boldsymbol{x}})$ *qui est de la forme* $\exists\boldsymbol{y}(\mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))$ *et chaque* $\vec{a}$ *dans* $\mathbf{M}_\bullet$,

$$\text{(1.3)}\qquad \textit{s'il existe } b \textit{ dans } \mathbf{M} \textit{ vérifiant } (\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a}, b), \\ \textit{alors il existe } b' \textit{ dans } \mathbf{M}_\bullet \textit{ vérifiant } (\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a}, b').$$

Démonstration. Quitte à remplacer les formules F_i par des formules équivalentes, et à ajouter à la liste les sous-formules correspondantes, on peut supposer que $\forall$ n'apparaît pas dans les formules F_i. On raisonne par récurrence sur la longueur des formules F_i. Toute formule atomique est absolue pour $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M})$, et, d'autre part, l'absoluité de G et H entraîne celles de $\neg\mathsf{G}$ et de $\mathsf{G}\,\mathsf{c}\,\mathsf{H}$ pour chaque connecteur propositionnel c. Le seul cas non trivial est donc celui d'une formule $\mathsf{F}_\mathsf{i}(\vec{\boldsymbol{x}})$ qui est de la forme $\exists\boldsymbol{y}(\mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))$. Supposons $\vec{a} \in \mathbf{M}_\bullet$, et $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{i}(\vec{a})$. Par définition, il existe b dans $\mathbf{M}$ vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a}, b)$. Par (1.9), on déduit l'existence de b' dans $\mathbf{M}_\bullet$ vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a}, b')$. L'hypothèse de récurrence garantit l'absoluité de F_j. On a donc $(\mathbf{M}_\bullet, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a}, b')$, d'où $(\mathbf{M}_\bullet, \in) \models \exists\boldsymbol{y}(\mathsf{F}_\mathsf{j}(\vec{a},\boldsymbol{y}))$, et $(\mathbf{M}_\bullet, \in) \models \mathsf{F}_\mathsf{i}(\vec{a})$. □

[1] c'est-à-dire si $\mathsf{F}^{(\mathbf{M}_\bullet, \in)}(\vec{a})$ équivaut à $\mathsf{F}^{(\mathbf{M}, \in)}(\vec{a})$

Proposition 1.10. (schéma de réflexion) *Supposons que* $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$ *est une suite définissable d'ensembles qui est croissante et continue pour l'inclusion, et soit* $\mathbf{M} := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} M_\alpha$. *Alors, pour toute famille finie de formules* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ *de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$, *et pour tout ordinal* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ *sont absolues pour* $(M_\beta, \mathbf{M})$.

Démonstration. Quitte à ajouter à la famille des F_i leurs sous-formules, on peut supposer la famille close par sous-formule. Supposons que $\mathsf{F}_i(\vec{\boldsymbol{x}})$ est de la forme $\exists \boldsymbol{y}(\mathsf{F}_j(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}))$. Pour $\vec{a}$ suite finie d'éléments de $\mathbf{M}$, on note $\mu(\vec{a})$ le plus petit ordinal α tel qu'il existe b dans M_α vérifiant $\mathsf{F}_j^{(\mathbf{M},\in)}(\vec{a}, b)$, s'il en existe, et 0 sinon. On définit alors une fonction $f_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ par

$$f_i(\alpha) := \sup\{\mu(\vec{a})\,;\, \vec{a} \in M_\alpha\}.$$

Comme M_α est un ensemble, un axiome de remplacement garantit l'existence de $f_i(\alpha)$ pour tout α. Alors, par construction, on a, pour tous $\vec{a}$ dans M_α,

(1.4) s'il existe b dans $\mathbf{M}$ vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_j(\vec{a}, b)$,
alors il existe b' dans $M_{f_i(\alpha)}$ vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_j(\vec{a}, b')$.

Si F_i n'est pas du type ci-dessus, on définit f_i comme constante de valeur 0. À ce point, la condition (1.4) est presque celle de (1.3) avec $\mathbf{M}_\bullet = M_{f_i(\alpha)}$, à ceci près que l'ensemble-source M_α ne coïncide pas avec l'ensemble-image $M_{f_i(\alpha)}$. Mais ce point est facile, la croissance et la continuité de la suite des M_α garantissant l'existence de points fixes pour les fonctions f_i. Précisément, partant de α quelconque, on définit récursivement une suite β_p en posant $\beta_0 := \alpha$, puis $\beta_{p+1} := \sup(f_1(\beta_p), ..., f_n(\beta_p), \beta_p + 1)$, et enfin $\beta = \sup\{\beta_p\,;\, p \in \omega\}$. Par construction, chaque fonction f_i est non décroissante, et on a donc $\beta = f_i(\beta)$. Par ailleurs $\beta_p < \beta_{p+1}$ implique $M_{\beta_p} \subseteq M_{\beta_{p+1}}$, puis $M_\beta = \bigcup M_{\beta_p}$ et, finalement, on obtient, pour tous $\vec{a}$ dans M_β et pour tout i,

(1.5) s'il existe b dans $\mathbf{M}$ vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_j(\vec{a}, b)$,
alors il existe b' dans M_β vérifiant $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}_j(\vec{a}, b')$.

On conclut en appliquant le lemme 1.9 au couple $(M_\beta, \mathbf{M})$. □

▷ *On notera que le schéma de réflexion ne dit rien quant à la satisfaction des formules* F *concernées : on affirme seulement que les formules* $\mathsf{F}^{\mathcal{M}}$ *et* F^{M_β} *sont équivalentes, donc soit toutes deux vraies, soit toutes deux fausses, et c'est tout.* ◁

Appliquant le schéma précédent à la classe $\mathbf{V}$ et aux ensembles V_α, on obtient

Corollaire 1.11. *Pour toute famille finie de formules* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ *de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$, *et pour tout ordinal* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ *sont absolues pour* V_β.

1.3. Une caractérisation des modèles de ZF.

▶ On établit un critère caractérisant les modèles de ZF en termes de clôture par les opérations de Gödel. ◀

▷ *On va essentiellement montrer qu'une classe transitive* $\mathbf{M}$ *contenant les ordinaux est (lorsque munie de la relation* $\in\restriction_{\mathbf{M}}$*) modèle de* ZF *si et seulement si elle est close par les opérations de Gödel. Le résultat formel est légèrement plus faible, dans la mesure où il faut imposer une condition additionnelle garantissant que, pour tout ordinal* α, *il existe un élément de* $\mathbf{M}$ *contenant tous les éléments de* $\mathbf{M}$ *de rang au plus* α. ◁

Définition 1.12. (stratifié) On dit qu'une classe $\mathbf{M}$ est *stratifiée* s'il existe une suite non décroissante et continue d'ensembles $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$ vérifiant $M_\alpha \in \mathbf{M}$ pour chaque α et $\mathbf{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} M_\alpha$.

Proposition 1.13. (critère) *Supposons que* $\mathbf{M}$ *est une classe transitive de* $\mathbf{V}$ *contenant les ordinaux. Alors* $\mathbf{M}$ *est un modèle intérieur de* $\mathbf{V}$ *si et seulement si* $\mathbf{M}$ *est stratifiée et close par les opérations de Gödel.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{M}$ est modèle intérieur de $\mathbf{V}$. Pour chaque ordinal α, soit $M_\alpha := V_\alpha^{\mathbf{M}}$. Puisque $\mathbf{M}$ est définissable dans $(\mathbf{V}, \in)$, la suite $(M_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ est définissable, et, par construction, elle est non décroissante et continue. Alors, puisque $(\mathbf{M}, \in)$ est modèle de ZF, donc en particulier de l'axiome de fondation, $\mathbf{M}$ est l'union des M_α [2]. Par conséquent, $\mathbf{M}$ est stratifiée. Par ailleurs, d'après le lemme 1.5, les opérations de Gödel Γ_i sont absolues pour $\mathbf{M}$, donc, pour tous $\vec{a}$ dans $\mathbf{M}$, on a $\Gamma_i(\vec{a}) = \Gamma_i^{\mathbf{M}}(\vec{a})$, ce qui montre en particulier que $\Gamma_i(\vec{a})$ appartient à $\mathbf{M}$.

Inversement, supposons que $\mathbf{M}$ est une classe transitive, close par les opérations de Gödel, et union d'une suite $(M_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ non décroissante et continue. On veut montrer que $\mathbf{M}$ satisfait tous les axiomes de ZF. Puisque $\mathbf{M}$ est transitive, on sait par le lemme IX.2.2(i) que les axiomes d'extensionnalité et de fondation sont satisfaits dans $(\mathbf{M}, \in)$. Ensuite, soient a, b deux éléments de $\mathbf{M}$. Par hypothèse, il existe α, β vérifiant $a \in M_\alpha$ et $b \in M_\beta$. Alors la paire $\{a, \beta\}$ est incluse dans $M_{\sup(a,b)}$, et, par le lemme IX.2.2(ii), on déduit que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiomes de la paire.

Soit à nouveau a quelconque dans $\mathbf{M}$. Puisque $\mathbf{M}$ est transitive, tous les éléments de a sont dans $\mathbf{M}$, et de même tous les éléments des éléments de a. Donc l'ensemble $\bigcup a$ est inclus dans $\mathbf{M}$. Pour chacun des éléments x de $\bigcup a$ il existe un plus petit ordinal α_x tel que x appartienne à M_{α_x} et, par remplacement dans $\mathbf{V}$, il existe un ordinal α majorant tous les α_x pour x dans $\bigcup a$. Alors M_α est un élément de $\mathbf{M}$ qui inclut $\bigcup a$, et, par le lemme IX.2.2(ii), on déduit que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiomes de l'union.

Le même argument montre que l'ensemble $\mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$ est inclus dans un élément M_α de $\mathbf{M}$ et, toujours par le lemme IX.2.2(ii), on déduit que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiomes des parties. Enfin, supposons que $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ est une formule et que a et $\vec{c}$ dans $\mathbf{M}$ sont tels qu'on ait $\forall \boldsymbol{x} {\in} a\ \exists! \boldsymbol{y}$ $(\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$. Alors, par remplacement dans $\mathbf{V}$ (ce qui est légitime puisque $\mathbf{M}$ est supposé définissable), $\{\boldsymbol{y} \in \mathbf{M} \,;\, \exists \boldsymbol{x} {\in} a (\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c})\}$ est un ensemble dans $\mathbf{V}$, dans $\mathbf{M}$ par construction, et le même argument que ci-dessus montre qu'il est inclus dans un ensemble M_α de $\mathbf{M}$. Par le lemme IX.2.2(iv), on déduit que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome de remplacement associé à la formule F.

Le cas *a priori* difficile est celui des axiomes de séparation. Supposons alors que a et $\vec{c}$ sont des éléments de $\mathbf{M}$, donc d'un certain ensemble M_α, et que $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{z}})$ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$. On veut montrer que l'axiome de séparation associé à la formule F et aux paramètres a et $\vec{c}$ est satisfait dans $(\mathbf{M}, \in)$. D'après le lemme IX.2.2(iii), il s'agit de montrer que l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in a \,;\, \mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}$, c'est-à-dire $\{\boldsymbol{x} \,;\, (\mathbf{M}, \in) \models \boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}$, appartient à $\mathbf{M}$. Or, par le schéma de réflexion, il existe un ordinal $\beta \geqslant \alpha$ tel que M_β reflète la formule $\boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{z}})$, et, par conséquent, on a

$$\{\boldsymbol{x} \,;\, (\mathbf{M}, \in) \models \boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\} = \{\boldsymbol{x} \,;\, (M_\beta, \in) \models \boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}. \tag{1.6}$$

Par ailleurs, le corollaire 1.4 implique l'existence d'une composition d'opérations de Gödel Γ vérifiant

$$\{\boldsymbol{x}; (M_\beta, \in) \models \boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\} = \Gamma(M_\beta, a, \vec{c}).$$

Comme M_β, a, et $\vec{c}$ sont des éléments de $\mathbf{M}$, et que $\mathbf{M}$ est close par opération de Gödel, on conclut que l'ensemble $\{\boldsymbol{x}; (M_\beta, \in) \models \boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}$ appartient à $\mathbf{M}$, et, de là, que $\mathbf{M}$ satisfait les axiomes de séparation.

[2] Utilisant l'absoluité de l'ensemble vide et de l'union, et la formule $\mathfrak{P}(a)^{\mathbf{M}} = \mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$, on peut montrer inductivement la relation $M_\alpha = V_\alpha \cap \mathbf{M}$.

Pour terminer, l'axiome de l'infini est certainement satisfait dans $\mathbf{M}$ puisque, par hypothèse, ω est dans $\mathbf{M}$, et que la propriété « être ω » est absolue. $\square$

$\triangleright$ *On notera l'importance du schéma de réflexion dans la démonstration précédente : si on ne pouvait pas se ramener de la satisfaction dans la classe* $\mathbf{M}$ *entière à la satisfaction dans un ensemble* M_β *convenable, la seule hypothèse de clôture par les opérations de Gödel ne pourrait pas être exploitée.* $\triangleleft$

1.4. Le modèle des ensembles constructibles.

$\blacktriangleright$ On introduit la classe $\mathbf{L}$ des ensembles constructibles comme la clôture des ordinaux par les opérations de Gödel completée par une opération convenable de formation de suite, de façon à garantir les conditions d'application de la proposition 1.13, et on montre que $(\mathbf{L}, \in)$ est modèle de ZF. $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ *On se propose de construire une classe* $\mathbf{L}$ *qui soit le plus petit modèle intérieur de* $\mathbf{V}$*. Par définition, tout modèle intérieur de* ZF *contient tous les ordinaux, et, en vertu du lemme 1.5, il est clos par les opérations de Gödel. Par conséquent, tout modèle intérieur inclut la clôture des ordinaux par opérations de Gödel. Par ailleurs, on a vu que tout modèle intérieur est stratifié. Le candidat naturel pour être un plus petit modèle intérieur, s'il en existe un, est donc évident : il s'agit de la clôture des ordinaux par opérations de Gödel, adaptée de façon à garantir le caractère stratifié de la classe obtenue. On va montrer que cette idée simple fonctionne.*

Il existe plusieurs façons d'énumérer la clôture de Gödel des ordinaux. A posteriori, on verra que le résultat est indépendant de l'ordre d'énumération, mais, pour le moment, il faut fixer une telle énumération, forcément contingente. Etant donné que certaines opérations de Gödel ont deux arguments, la première étape est de fixer une bijection entre les ordinaux et les couples d'ordinaux telle que les composantes du α*-ème couple soient des ordinaux inférieurs ou égaux à* α*, pour tout* α*.* $\triangleleft$

Lemme 1.14. *Soit* $\boldsymbol{\pi}$ *l'opération définie sur* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ *par*

$$\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) := \begin{cases} \max(\alpha, \beta)^2 + \alpha & \text{pour } \alpha < \beta, \\ \max(\alpha, \beta)^2 + \alpha + \beta & \text{pour } \beta \geqslant \alpha. \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors $\boldsymbol{\pi}$ *est une bijection de* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ *sur* $\mathbf{Ord}$*, et elle est, de même que la bijection réciproque, absolue pour les classes transitives modèles de* ZF.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition V.2.5, soit $\prec$ la relation sur $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ telle que $(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta')$ est vrai si on a ou bien $\max(\alpha, \beta) < \max(\alpha', \beta')$, ou bien $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta')$ et $\alpha < \alpha'$, ou bien $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta')$ et $\alpha = \alpha'$ et $\beta < \beta'$. On a vu au chapitre V que $\prec$ est un bon ordre. Alors une induction montre que $\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) = \gamma$ est vérifié si et seulement si il existe un isomorphisme entre l'ensemble des $\prec$-prédécesseurs de (α, β) et $(\gamma, \in)$, et on obtient donc un isomorphisme d'ensembles ordonnés. En vertu de la proposition IX.2.12 et de la caractérisation précédente, la relation $(\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) = \gamma$ est absolue pour les classes transitives modèles de ZF. Il en est de même des deux composantes $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ de l'isomorphisme réciproque, puisque $\alpha = \boldsymbol{\pi}_1(\gamma)$ équivaut à $\exists \beta \leqslant \gamma(\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) = \gamma)$ et $\beta = \boldsymbol{\pi}_2(\gamma)$ équivaut à $\exists \alpha \leqslant \gamma(\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) = \gamma)$. $\square$

Notation 1.15. $(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)})$ Pour tout ordinal γ, on note $\gamma_{(i)}$ pour $\boldsymbol{\pi}_i(\gamma)$.

On note qu'on a toujours $\gamma_{(i)} \leqslant \gamma$, et même $\gamma_{(i)} < \gamma$ pour $\gamma \geqslant 2$.

Définition 1.16. (constructible) On définit récursivement $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$ par

$$(1.8)\qquad c_\alpha := \begin{cases} \{c_\beta\,;\,\beta<\alpha\} & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10\cdot\gamma,\\ \Gamma_i(c_{\gamma(1)},c_{\gamma(2)}) & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10\cdot\gamma+i \text{ avec } i=1,2,3,\\ \Gamma_i(c_\gamma) & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10\cdot\gamma+i \text{ avec } i=4,\dots,8,\\ \gamma & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10\cdot\gamma+9.\end{cases}$$

Un ensemble est dit *constructible* s'il est l'un des ensembles c_α ; on note $\mathbf{L}$ la classe de tous les ensembles constructibles.

Exemple 1.17. (constructible) L'énumération des premiers ensembles constructibles est la suivante — et on notera qu'elle est redondante :
- $c_0 := \emptyset = 0$,
- $c_1 := \Gamma_1(c_0,c_0) = \{\emptyset,\emptyset\} = \{\emptyset\} = 1$,
- $c_2 := \Gamma_2(c_0,c_0) = \emptyset\times\emptyset = \emptyset = 0$,
- $c_3 := \Gamma_3(c_0,c_0) = \emptyset\setminus\emptyset = \emptyset = 0$, ...
- $c_9 := 0$,
- $c_{10} := \{c_0,\dots c_9\} = \{0,1\} = 2$,
- $c_{11} := \Gamma_1(c_0,c_1) = \{0,1\} = 2$, *etc.*

Proposition 1.18. (constructibles) *La classe* $\mathbf{L}$ *est un modèle intérieur de* $\mathbf{V}$ *— c'est-à-dire : pour tout modèle* $\mathcal{M}$ *de* ZF*, la structure* $(\mathbf{L}^{\mathcal{M}},\in^{\mathcal{M}}\restriction_{\mathbf{L}^{\mathcal{M}}})$ *est un modèle intérieur de* $\mathcal{M}$.

Démonstration. On applique le critère de la proposition 1.13. Par définition, on a $\gamma = c_{10\cdot\gamma+9}$, donc tout ordinal est constructible. Par ailleurs, la famille des ensembles constructibles est close par opération de Gödel puisque, pour $i=1,\dots,3$, on a $\Gamma_i(c_\alpha,c_\beta) = c_{10\cdot\boldsymbol{\pi}(\alpha,\beta)+i}$ et, pour $i=4,\dots,8$, on a $\Gamma_i(c_\alpha) = c_{10\cdot\alpha+i}$. Ensuite, toujours par construction, on a $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} c_{10\cdot\alpha}$, et la suite des ensembles $c_{10\cdot\alpha}$ est non décroissante pour l'inclusion et continue, donc la classe $\mathbf{L}$ est stratifiée. Il ne reste donc qu'à montrer que $\mathbf{L}$ est une classe transitive. Pour cela, on montre inductivement sur α que, si on a $x\in c_\alpha$, alors on a $x\in\mathbf{L}$. Le résultat est immédiat si α est congru à 0 ou 9 *modulo* 10, et pour $\alpha\leqslant 20$. Supposons $\alpha = 10\cdot\gamma+i$ avec $1\leqslant i\leqslant 8$ et $\gamma\geqslant 2$. Pour $i=1$, les éléments de c_α sont $c_{\gamma(1)}$ et $c_{\gamma(2)}$, donc le résultat est vrai. Pour $i=2$, les éléments de c_α sont des couples (x,y) vérifiant $x\in c_{\gamma(1)}$ et $y\in c_{\gamma(2)}$. Par hypothèse d'induction, x et y sont dans $\mathbf{L}$, et il en est donc de même du couple (x,y) puisque $\mathbf{L}$ est clos par l'opération Γ_1. Pour $i=3$, les éléments de c_α sont tous éléments de $c_{\gamma(1)}$, donc, par hypothèse d'induction, sont constructibles. Pour $i=4,5$, les éléments de c_α sont des couples (x,y) avec $x,y\in c_\gamma$, donc, par hypothèse d'induction et clôture de $\mathbf{L}$ par Γ_1, ils sont constructibles. Enfin, pour $i=6,7,8$, les éléments de c_α sont des éléments d'éléments de c_γ, donc, toujours par hypothèse d'induction, ce sont des ensembles constructibles. □

1.5. Absoluité de L.

► On vérifie que la relation $x = c_\alpha$ est une relation Δ_1^{ZF}, et on déduit le caractère absolu de la classe $\mathbf{L}$ pour les modèles intérieurs, c'est-à-dire le fait que, pour tout modèle intérieur $\mathbf{M}$ de $\mathbf{V}$, on a $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$. ◄

▷ *Comme la classe* $\mathbf{L}$ *n'a pas été définie formellement comme étant exactement la clôture des ordinaux par les opérations de Gödel, son caractère absolu n'est a priori pas évident. Au demeurant, il est très facile d'établir le résultat en invoquant une méthode générale qui sera utilisée* *plusieurs fois dans la suite, à savoir en inspectant la définition et en vérifiant qu'elle est d'une forme syntaxique suffisamment simple pour garantir l'absoluité de la notion associée.* ◁

On rappelle (définition IX.2.18) qu'une opération $\mathbf{F}$ ou une relation définissable $\mathbf{R}$ (donc en particulier une classe définissable) est dite (de complexité) Δ_1^{ZF} si, parmi les définitions de $\mathbf{F}$ ou de $\mathbf{R}$ figurent au moins une formule Σ_1^{ZF} et une formule Π_1^{ZF}.

Le résultat technique suivant est fondamental.

LEMME 1.19. *Si $\mathbf{F}$ est une opération Σ_1^{ZF}, alors la suite $\mathbf{G}$ définie récursivement par $\mathbf{G}(\alpha) := \mathbf{F}(\alpha, \mathbf{G}\restriction_\alpha)$ est Δ_1^{ZF}.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $b = \mathbf{F}(\alpha, s)$ est ZF-équivalente à la formule $\mathsf{F}(\alpha, s, b)$ supposée Σ_1. Alors $x = \mathbf{G}(\alpha)$ équivaut *modulo* ZF à chacune des deux formules

$$\exists \boldsymbol{f}\, \exists \boldsymbol{\theta}\, (\alpha \in \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{f}{:}\theta{\to}\mathbf{V} \wedge \forall \beta{\in}\theta(\boldsymbol{f}(\beta) = \mathbf{F}(\beta, \boldsymbol{f}\restriction_\beta)) \wedge x = \boldsymbol{f}(\alpha)),$$
$$\forall \boldsymbol{f}\, \forall \boldsymbol{\theta}\, ((\alpha \in \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{f}{:}\theta{\to}\mathbf{V} \wedge \forall \beta{\in}\theta(\boldsymbol{f}(\beta) = \mathbf{F}(\beta, \boldsymbol{f}\restriction_\beta))) \Rightarrow x = \boldsymbol{f}(\alpha)),$$

donc à

$$\exists \boldsymbol{f}\, \exists \boldsymbol{\theta}\, (\alpha \in \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{f}{:}\theta{\to}\mathbf{V} \wedge \forall \beta{\in}\theta(\mathsf{F}(\beta, \boldsymbol{f}\restriction_\beta, \boldsymbol{f}(\beta)) \wedge x = \boldsymbol{f}(\alpha)),$$

qui est une formule Σ_1, et à

$$\forall \boldsymbol{f}\, \forall \boldsymbol{\theta}\, (\neg(\alpha \in \boldsymbol{\theta}) \vee \neg(\boldsymbol{f}{:}\theta{\to}\mathbf{V}) \vee \exists \beta{\in}\theta(\neg\mathsf{F}(\beta, \boldsymbol{f}\restriction_\beta, \boldsymbol{f}(\beta))) \vee x = \boldsymbol{f}(\alpha)),$$

qui est une formule Π_1. □

▷ *On a vu que la classe $\mathbf{L}$ est un modèle intérieur de $\mathbf{V}$. Supposons que $\mathbf{M}$ est un modèle intérieur de $\mathbf{V}$ quelconque. Alors, puisque $\mathbf{M}$ est modèle de ZF, tous les objets ZF-définissables y ont une interprétation, en particulier les ensembles constructibles et la classe $\mathbf{L}$. Par conséquent, pour tout ordinal α, il existe un objet $c_\alpha^{\mathbf{M}}$ qui est le α-ème ensemble constructible au sens de $\mathbf{M}$, et une classe définissable $\mathbf{L}^{\mathbf{M}}$ qui est la classe des constructibles au sens de $\mathbf{M}$. Ce qu'on va montrer ici, c'est qu'on a $c_\alpha^{\mathbf{M}} = c_\alpha$ pour tout α, et $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$. Autrement dit, la notion d'ensemble constructible est absolue pour les modèles intérieurs. La démonstration de ce résultat est facile : d'après le lemme 1.19(iii), il suffit de montrer que la relation $x = c_\alpha$ est définie récursivement à partir d'une opération Σ_1. Comme la complexité des opérations de Gödel est connue, on peut s'attendre à ce que le résultat, s'il est correct, soit de démonstration aisée.* ◁

PROPOSITION 1.20. (absoluité) *La relation $x = c_\alpha$ est Δ_1^{ZF}, et la relation « x est constructible » est Σ_1^{ZF}.*

DÉMONSTRATION. En vertu de (1.8), la classe fonctionnelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c_\alpha}$ est la suite définie récursivement à partir de l'opération $\mathbf{F}$ elle-même définie par

$$\mathbf{F}(\alpha, f) := \begin{cases} \mathrm{Im} f & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10{\cdot}\gamma, \\ \Gamma_i(f(\gamma_{(1)}), f(\gamma_{(2)})) & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10{\cdot}\gamma + i \text{ avec } i = 1, 2, 3, \\ \Gamma_i(f(\gamma)) & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10{\cdot}\gamma + i \text{ avec } i = 4, \dots, 8, \\ \gamma & \text{pour } \alpha \text{ de la forme } 10{\cdot}\gamma + 9. \end{cases}$$

La relation $x = \mathbf{F}(\alpha, f)$ est donc ZF-équivalente à la formule

$\exists \gamma{\in}\alpha((\alpha = 10{\cdot}\gamma \wedge x = \mathrm{Im} f) \vee (\alpha = 10{\cdot}\gamma + 1 \wedge x = \Gamma_1(f(\gamma_{(1)}), f(\gamma_{(2)})) \vee \dots$. L'égalité $x = \mathrm{Im} f$, chacune des égalités $x = \Gamma_i(f(\gamma_{(1)}), f(\gamma_{(2)}))$, $x = \Gamma_i(f(\gamma))$, $x = \gamma$ sont exprimables par des formules Δ_0^{ZF}. Les égalités $\alpha = 10{\cdot}\gamma{+}i$ sont des isomorphismes entre ensembles ordonnés, et sont donc exprimables par des formules Σ_1^{ZF}, et, au total, on obtient une formule qui est (au pire) de complexité Σ_1^{ZF}. En appliquant le lemme 1.19(*iii*), on déduit que $x = c_\alpha$ est Δ_1^{ZF}, et que « x est constructible », qui s'exprime par $\exists\alpha(x = c_\alpha)$ est Σ_1^{ZF}. □

Corollaire 1.21. *Tout modèle intérieur de* $\mathbf{V}$ *inclut* $\mathbf{L}$ *; plus précisément, si* $\mathbf{M}$ *est un modèle intérieur, on a* $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$. *En particulier, on a* $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.

Démonstration. Par définition, $\mathcal{M}$ contient tous les ordinaux de $\mathbf{V}$. La formule $x = c_\alpha$ étant Δ_1^{ZF}, elle est absolue pour $\mathbf{M}$, et on a donc $c_\alpha^{\mathbf{M}} = c_\alpha$ pour tout ordinal α. Ceci entraîne que c_α appartient à $\mathbf{M}$, et donc qu'on a $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$, et, en particulier, que $\mathbf{L}$ est inclus dans $\mathbf{M}$. □

1.6. L'axiome du choix dans L.

► On montre que le modèle $\mathbf{L}$ satisfait l'axiome du choix, et on en déduit que, si le système ZF est consistant, il en est de même du système ZFC. ◄

▷ *Par construction, il existe une énumération des ensembles constructibles indexée par les ordinaux, et, par transport, il semble immédiat d'en déduire que tout ensemble constructible est bien ordonnable. Le problème est qu'au départ l'énumération est faite dans* $\mathbf{V}$*, et il n'est donc pas a priori évident que, de l'intérieur de* $\mathbf{L}$*, on puisse l'utiliser pour définir le bon ordre souhaité. C'est ici que les résultats d'absoluité de la section 1.5 sont utiles.* ◁

Proposition 1.22. (axiome du choix) *Le modèle intérieur* $\mathbf{L}$ *satisfait l'axiome du choix.*

Démonstration. Supposons $a \in \mathbf{L}$. Pour $x, y \in a$, on définit $x \prec y$ par[3]

$$\exists\alpha, \beta(\alpha = \mu\gamma(x{=}c_\gamma) \wedge \beta = \mu\gamma(y{=}c_\gamma) \wedge \alpha < \beta), \tag{1.9}$$

autrement dit si x apparaît pour la première fois avant y dans l'énumération des ensembles constructibles. Les relations « $\boldsymbol{\alpha}$ est un ordinal » et $\boldsymbol{x} = c_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont absolues, donc la relation $\prec$ coïncide avec sa contrepartie $\prec^{\mathbf{L}}$. Comme, dans $\mathbf{L}$, l'ordre des ordinaux est un bon ordre, la relation $\prec^{\mathbf{L}}$ est, dans $\mathbf{L}$, un bon ordre sur a. D'après le théorème de Zermelo (proposition IV.1.17), on conclut que le modèle $\mathbf{L}$ vérifie AC. □

▷ *Revenant au cadre général des modèles de* ZF*, ce qu'on vient de montrer, c'est que, partant d'un modèle quelconque* $\mathcal{M}$ *de* ZF*, on peut construire un nouveau modèle de* ZF*, à savoir le modèle intérieur* $\mathbf{L}^{\mathcal{M}}$*, qui, de surcroît est modèle de* AC*, et est donc un modèle de* ZFC*. Par conséquent, l'existence d'un modèle pour* ZF *entraîne l'existence d'un modèle pour* ZFC*. Conformément au schéma esquissé au chapitre IX, on déduit du théorème de complétude que la consistance du système* ZF *entraîne celle du système* ZFC*, et, en particulier, que la négation de l'axiome du choix,* ¬AC*, n'est pas prouvable à partir de* ZF*. A priori, cette démonstration fondée sur le théorème de complétude requiert un cadre métamathématique de théorie des ensembles. En fait, en suivant la méthode déjà décrite dans la section IX.3 et rappelée ci-dessous, on peut facilement obtenir le résultat de non-prouvabilité de* ¬AC *dans un cadre métamathématique bien plus faible, et donc encore moins sujet à caution.* ◁

Proposition 1.23. (non-prouvabilité) (PA) *Si* ZF *est consistant, alors* ¬AC *n'est pas prouvable à partir de* ZF.

[3]On rappelle que $\alpha = \mu\gamma(\mathsf{F}(\gamma))$ signifie « α est le plus petit γ vérifiant $\mathsf{F}(\gamma)$ », et est donc exprimé par $\mathsf{F}(\alpha) \wedge \forall\gamma{<}\alpha(\neg\mathsf{F}(\gamma))$.

Démonstration. Les arguments donnés plus haut montrent que, pour chaque axiome F de ZF, il existe une preuve (purement syntaxique) de l'énoncé relativisé $\mathsf{F}^{\mathbf{L}}$, c'est-à-dire de F où chaque quantification est restreinte à $\mathbf{L}$. La transformation serait pénible, mais elle est possible car à aucun endroit on n'utilise l'hypothèse qu'il existe un modèle de ZF, mais simplement le fait que les axiomes de ZF sont satisfaits dans $\mathbf{V}$. De la même façon, on obtiendrait un preuve formelle de l'énoncé $\mathsf{AC}^{\mathbf{L}}$ à partir des axiomes de ZF.

Or supposons que $\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{n}$ est une preuve de $\neg\mathsf{AC}$ à partir de ZF. On montre inductivement que chacune des formules relativisées $\mathsf{F}_1^{\mathbf{L}}, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{n}^{\mathbf{L}}$ est prouvable à partir de ZF. Si F_i est un axiome de ZF, c'est le cas comme on l'a dit plus haut. Si F_i s'obtient par coupure à partir de F_j et F_k, il en est de même pour $\mathsf{F}_\mathsf{i}^{\mathbf{L}}$ à partir de $\mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}}$ et $\mathsf{F}_\mathsf{k}^{\mathbf{L}}$. Enfin, si F_i s'obtient par généralisation à partir de F_j, à savoir que F_i est $\forall \boldsymbol{x}(\mathsf{F}_\mathsf{j})$, alors, par hypothèse de récurrence, ZF prouve $\mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}}$ et, comme $\mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}} \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \mathbf{L} \Rightarrow \mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}})$ est un axiome logique, on déduit par coupure que ZF prouve $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L} \Rightarrow \mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}}$, puis, par généralisation, $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \in \mathbf{L} \Rightarrow \mathsf{F}_\mathsf{j}^{\mathbf{L}})$, qui est $\mathsf{F}_\mathsf{i}^{\mathbf{L}}$.

Finalement, ZF prouve $\mathsf{F}_\mathsf{n}^{\mathbf{L}}$, qui est $\neg\mathsf{AC}^{\mathbf{L}}$. D'autre part on a vu que ZF prouve $\mathsf{AC}^{\mathbf{L}}$. Donc, sous les hypothèses considérées, c'est-à-dire s'il existe une preuve de $\neg\mathsf{AC}$ à partir de ZF, on déduit que ZF n'est pas consistant puisqu'il prouve à la fois $\mathsf{AC}^{\mathbf{L}}$ et $\neg\mathsf{AC}^{\mathbf{L}}$. □

▷ *La démonstration de la proposition 1.22 établit en fait davantage que* AC*, à savoir une version uniforme de l'axiome du choix : la définition de la relation* $\prec$ *ne dépend pas de l'ensemble* a*, et* (1.9) *définit une relation sur* $\mathbf{L}$ *qui est un bon ordre. Cette version, parfois appelée* ***principe de choix****, est par exemple celle retenue dans le traité de Bourbaki* [**2**]*. Ce qu'établit la démonstration ci-dessus est essentiellement que la consistance de* ZF *entraîne la consistance du système de Bourbaki.* ◁

2. Les ensembles L_α et l'hypothèse du continu dans L

► On décrit une autre construction du modèle $\mathbf{L}$ comme réunion croissante d'une suite d'ensembles L_α analogues aux ensembles V_α mais mettant en jeu une notion convenable d'ensemble des parties définissables d'un ensemble. Cette approche permet un contrôle plus fin des propriétés du modèle $\mathbf{L}$, et, en particulier, on montre que $\mathbf{L}$ satisfait l'hypothèse généralisée du continu, ce qui établit la consistance relative de HCG par rapport à ZF. ◀

▷ *Le modèle* $\mathbf{L}$ *est le plus petit modèle intérieur de* $\mathbf{V}$ *: comme le sous-corps premier d'un corps, il ne contient que les ensembles qui, en un certain sens, sont inévitables. Parmi ceux-ci figurent tous les ensembles qui sont définissables, c'est-à-dire ceux dont l'existence est explicitement requise par les axiomes de* ZF*, en particulier les axiomes de séparation. Il apparaît donc naturel d'introduire des ensembles* L_α *définis récursivement comme les ensembles* V_α *mais en substituant à l'opération* $\mathfrak{P}$ *une opération* $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}$ *correspondant à sélectionner exclusivement les parties définissables. On va voir que ce point de vue requiert du soin pour être mis en œuvre, mais qu'il mène en effet à une description alternative de la classe* $\mathbf{L}$ *et des ensembles constructibles.* ◁

2.1. Définissabilités externe et interne.

► L'introduction d'un hypothétique ensemble des parties définissables d'un ensemble pose plusieurs difficultés. On montre comment les contourner en remplaçant la notion externe de définissabilité par une version interne, au prix d'une possible distortion en cas de modèle non-standard. On relie alors la notion ainsi obtenue à la clôture par opérations de Gödel. ◀

$\triangleright$ *On a déjà rencontré plusieurs fois la notion d'opération ou de relation définissable dans une structure (cf. exercices du chapitre VII). Dans le cas de la théorie des ensembles, la notion est familière et renvoie directement aux axiomes de séparation : on dit qu'une formule (avec paramètres)* $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})$ *de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$ *est une définition pour une partie* b *de* a *si on a*

$$b = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, \mathbf{V} \models \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}. \tag{2.1}$$

Il est alors naturel de déclarer que b *est une partie définissable de* a *s'il existe au moins une formule* F *de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$ *et une suite* $\vec{c}$ *satisfaisant* (2.1)*, donc si* b *peut être introduite par séparation dans* a*. Il est alors tentant d'introduire un ensemble des parties définissables de* a *en faisant varier* F *sur l'ensemble de toutes les formules de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$*, c'est-à-dire en considérant*

$$\mathfrak{P}^\star_{\text{def}}(a) := \{\boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}(a)\,;\, \exists \mathsf{F} \in \mathcal{L}_{\text{ens}}\, \exists \vec{c}\, (\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, \mathbf{V} \models \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\})\}. \tag{2.2}$$

Le problème est que cette définition n'est ***pas*** *une définition par séparation à l'intérieur de* $\mathfrak{P}(a)$*, pour au moins deux raisons : l'une est qu'une formule* F *n'est pas un ensemble, mais un mot du contexte métamathématique — une formule fait partie du discours sur les ensembles, mais n'est pas un ensemble — l'autre est que, même si on remplace les formules par des ensembles qui en sont la contrepartie, la relation de satisfaction* $\mathbf{V} \models$ *n'est pas exprimable par une formule ensembliste, en vertu du théorème de Tarski sur la non-définissabilité de la vérité. Il en résulte que rien ne garantit l'existence de l'ensemble de* (2.2).

La première difficulté peut être contournée en substituant aux formules externes au monde des ensembles des contreparties de celles-ci à l'intérieur du monde des ensembles. Ceci a précisément été fait au chapitre VII lorsqu'on a défini pour chaque formule F *de* $\mathcal{L}_{\max}$*, donc en particulier de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$ *qui en est un fragment, un ensemble* $\underline{\mathsf{F}}$ *élément de* V_ω *qui la code. Une fois les formules ainsi transposées dans le monde des ensembles, la construction des formules, et, plus généralement, celle de toutes les notions des logiques* $\mathcal{L}_{\max}$ *ou* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$*, devenue une opération ensembliste, peut être effectuée dans tout modèle de* ZF*.* $\triangleleft$

Définition 2.1. (logique $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$) Supposons que $\mathcal{M}$ est un modèle de ZF, et que Σ est une signature incluse dans $\Sigma_{\max}$. On définit la logique $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ comme l'interprétation dans $\mathcal{M}$ de la logique $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma$.

$\triangleright$ *Il n'y a rien de très mystérieux dans cette version de la logique du premier ordre rendue interne à un modèle de la théorie des ensembles : essentiellement, à un codage près, la logique* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{M}$ *est une copie de la logique* $\mathcal{L}_\Sigma$*. En particulier, toutes les résultats démontrés au chapitre VII l'ont été à l'aide d'arguments formalisables dans* ZF*, et, par conséquent, ils sont ipso facto valides dans tout modèle de* ZF*, et c'est en particulier le cas du théorème de complétude.*

Un point doit néanmoins être souligné. De même qu'au chapitre VIII l'existence de modèles non-standards de l'arithmétique a obligé à du soin dans la manipulation des formules $\ulcorner\mathsf{F}\urcorner$*, de même l'existence de modèles non-standards de* ZF *oblige à du soin. On a vu dans la section IX.1.3 que, pour autant qu'il existe des modèles de* ZF*, il existe inévitablement des modèles de* ZF *non standards, c'est-à-dire des modèles où* ω *contient, au-delà des ordinaux* $\underline{\mathsf{n}}$ *pour* n *entier naturel, des entiers dits non standards. Si* $\mathcal{M}$ *est un modèle standard de* ZF*, alors tous les entiers de* $\mathcal{M}$ *sont standards, et, de même que tout entier de* $\mathcal{M}$ *est de la forme* $\underline{\mathsf{n}}^{\mathcal{M}}$ *pour un entier naturel* n*, toute formule de* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ *est de la forme* $\underline{\mathsf{F}}^{\mathcal{M}}$ *pour une formule de* $\mathcal{L}_\Sigma$*, et la logique* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ *est une simple copie de la logique* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma$*. Par contre, si* $\mathcal{M}$ *est un modèle non-standard de* ZF*, la logique* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ *contient des formules qui ne sont de la forme* $\underline{\mathsf{F}}^{\mathcal{M}}$ *pour aucune formule* F *de* $\mathcal{L}_{\text{ens}}$*, c'est-à-dire pour aucune formule intuitive (ou naturelle, ou encore du discours) : si* i *est un entier non-standard, la formule* $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i$ *ne saurait être de la forme* $\underline{\mathsf{F}}$*. De même, la définition récursive de l'ensemble des formules de* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma$ *comme plus petit ensemble clos par un certain nombre de transformations implique que* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ *contient des formules de longueur infinie : par exemple, pour tout entier* a *de* $\mathcal{M}$*, il existe dans* $\underline{\mathcal{L}}_\Sigma^{\mathcal{M}}$ *une formule qui est* $\boldsymbol{x}_1 = 0 \vee \boldsymbol{x}_1 = 1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_1 = a$ *; or, si* a *est non standard, cette formule, vue de l'extérieur de* $\mathcal{M}$*, a une longueur infinie et, à ce titre, ne peut être de la forme* $\underline{\mathsf{F}}^{\mathcal{M}}$*. De la même façon encore, les interprétations dans* $\mathcal{M}$ *d'ensembles de formules tels que* PA *ou* ZF*, naturellement notés* $\mathsf{PA}^{\mathcal{M}}$ *et* $\mathsf{ZF}^{\mathcal{M}}$*, ne correspondent* *pas nécessairement à leurs contreparties externes : dès lors qu'il existe des formules de* $\underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{arith}}^{\mathcal{M}}$ *ou de* $\underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}^{\mathcal{M}}$ *qui ne sont les contreparties d'aucune formule externe, le système* $\mathsf{PA}^{\mathcal{M}}$ *et* $\mathsf{ZF}^{\mathcal{M}}$*, qui contiennent respectivement les axiomes d'induction et de séparation associés à toutes les formules de la logique considérée contiennent donc, dans le cas d'un modèle non standard, des axiomes qui ne correspondent à aucun axiome des systèmes* PA *et* ZF *externes, c'est-à-dire du niveau du discours. Cette discussion n'est pas destinée à plonger le lecteur dans des abîmes de perplexité, mais simplement à bien préciser la situation — et à souligner une fois de plus les dangers d'identifications arbitraires.*

Revenons à la notion de définissabilité et aux difficultés liées à la tentative de définition (2.2)*. La solution à la première difficulté est maintenant claire : ayant obtenu une contrepartie ensembliste interne* $\underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}$ *pour* $\mathfrak{L}_{\mathrm{ens}}$*, on propose de remplacer* (2.2) *par*

$$(2.3)\qquad \mathfrak{P}^{\star}_{\mathrm{def}}(a) := \{\boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}(a)\,;\, \exists F \in \underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}\, \exists \vec{c}\,(\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, (\mathbf{V}, \in) \models F(\boldsymbol{x}, \vec{c})\})\} \ :$$

cette fois, les formules sont des ensembles et l'obstruction est levée — au prix d'une éventuelle altération de la notion obtenue puisqu'on a noté que, dans le cas d'un modèle non standard, la notion de définissabilité interne ainsi obtenue ne coïncide pas nécessairement avec la notion de définissabilité externe précédemment envisagée.

Un second problème empêche (2.3) *d'être une définition par séparation légitime. La construction de la logique* $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}$ *et de là son interprétation dans un modèle quelconque de* ZF *ne se limite pas à la syntaxe, mais inclut aussi la sémantique, c'est-à-dire la notion de réalisation et la relation de satisfaction reliant réalisations et formules: si* $\mathcal{M}$ *est un modèle de* ZF*, une réalisation pour la logique* $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}^{\mathcal{M}}$ *est, au sens de* $\mathcal{M}$*, une suite composée d'un ensemble non vide et d'une interprétation du type ad hoc pour chacun des symboles de* Σ*, et, pour* M *réalisation de* $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}^{\mathcal{M}}$ *et* F *formule de* $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}^{\mathcal{M}}$*, on définit récursivement la relation de satisfaction* $M \underline{\models}^{\mathcal{M}} F$ *en copiant les définitions VII.1.17 et VII.1.19. Le problème avec* (2.3) *est qu'y figure la satisfaction dans le modèle de référence* $\mathbf{V}$ *lui-même, lequel n'est pas un ensemble : dans un modèle* $\mathcal{M}$*, l'interprétation de* $\mathbf{V}^{\mathcal{M}}$ *est le domaine de* $\mathcal{M}$*, qui ne peut être un élément de lui-même, c'est-à-dire un ensemble au sens de* $\mathcal{M}$*.*

L'obstruction précédente ne saurait être contournée par un artifice technique, car le théorème de Tarski (proposition VIII.4.2) affirme précisément l'impossibilité de définir, pour un modèle $\mathcal{M}$ *de* ZF*, une formule* $\mathrm{Sat}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ *caractérisant dans* $\mathcal{M}$ *les formules de* $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}^{\mathcal{M}}$ *satisfaites dans* $\mathcal{M}$*. Il est donc nécessaire de modifier à nouveau* (2.3)*. Deux solutions existent. La première est de remplacer la classe* $\mathbf{V}$ *par un ensemble* V_α*, et de considérer l'ensemble*

$$(2.4)\qquad \mathfrak{P}_{\mathrm{deford}}(a) := \{\boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}(a)\,;\, \exists F \in \underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}\, \exists \alpha, \vec{\gamma} {\in} \mathbf{Ord}\,(\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, (V_\alpha, \in) \models F(\boldsymbol{x}, \vec{\gamma})\})\}$$

des parties de a dites définissables en termes d'ordinaux, et ceci conduit à un modèle intérieur dit des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux, noté HOD.

Une autre solution est de remplacer la classe $\mathbf{V}$ *par l'ensemble a lui-même, c'est-à-dire d'introduire*

$$(2.5)\qquad \mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a) := \{\boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}(a)\,;\, \exists F \in \underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}\, \exists \vec{c} {\in} a\,(\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, (a, \in) \models F(\boldsymbol{x}, \vec{c})\})\},$$

ne mettant en jeu que la structure $(a, \in)$*. C'est la notion qu'on retient ici.* ◁

Définition 2.2. (i-définissable) On dit qu'une partie b d'un ensemble a est internement définie, ou *i-définie*, avec paramètres $\vec{c}$, dans $(a, \in)$ par une formule F de $\underline{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ens}}$ si on a

$$(2.6)\qquad b = \{\boldsymbol{x} \in a\,;\, (a, \in) \models F(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}\,;$$

on dit que b est *i-définissable* dans $(a, \in)$ s'il existe au moins une formule F de $\underline{\mathfrak{L}}_{\Sigma}$ et une suite $\vec{c}$ satisfaisant (2.6), et on note $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$ l'ensemble des parties i-définissables de a.

▷ *Le point important est que l'opération $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}$ est une opération ensembliste ; en particulier, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de* ZF *et tout a dans le domaine de $\mathcal{M}$, il existe dans le domaine de $\mathcal{M}$ un élément b qui est la valeur de $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$ calculée dans $\mathcal{M}$ — à la différence du cas de la notion $\mathfrak{P}^{\star}_{\mathrm{def}}$ de (2.2). L'intérêt spécifique du choix de $(a, \in)$ comme structure de référence est de garantir le caractère minimal de la notion obtenue, et c'est lui qui va permettre d'effectuer le lien avec les opérations de Gödel et les ensembles constructibles.* ◁

Lemme 2.3. *Pour tout ensemble transitif a, l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$ est l'intersection de $\mathfrak{P}(a)$ avec $\mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(a \cup \{a\})$.*

Démonstration. La proposition 1.3 et le corollaire 1.4 qui en résulte ont été établis par récurrence sur la longueur de la formule F, qui est un entier naturel. La même démonstration peut être recopiée à l'intérieur de n'importe quel modèle $\mathcal{M}$ de ZF en une démonstration par induction sur la longueur de la formule F, qui est un entier de $\mathcal{M}$, du résultat semblable, à savoir que, pour toute formule F de $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{ens}}$, il existe une composition de fonction de Gödel Γ_F telle que, pour tout élément a de $\mathcal{M}$, on a

$$\{\vec{\boldsymbol{x}} \in a^{\mathsf{p}} \,;\, (a, \in) \models F(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{c})\}^{\mathcal{M}} = \Gamma_{(\mathsf{F}, \vec{\boldsymbol{z}})}(a, \vec{c}).$$

Ceci vaut en particulier pour tout sous-ensemble de a, et on en déduit que tout élément de $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$ appartient à la clôture de Gödel de $a \cup \{a\}$ puisque les paramètre a et $\vec{c}$ mis en jeu appartiennent à $a \cup \{a\}$.

Inversement, supposons que Γ est, dans $\mathcal{M}$, une composition d'opérations de Gödel et qu'on a $b = \Gamma(a, \vec{c})$ où $\vec{c}$ est une suite finie d'éléments de a. Alors, par le lemme 1.5 — ou, plus exactement, par sa version interne au modèle $\mathcal{M}$ — $y \in \Gamma(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{z}})$ est ZF^--équivalente à une formule $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ qui est Δ_0. On a alors

$$b = \Gamma(a, \vec{c}) = \{\boldsymbol{y} \in a \,;\, F(a, \boldsymbol{y}, \vec{c})\},$$

Puisque F est une formule Δ_0, et que a est un ensemble transitif, F est absolue pour a, et on a donc

$$b = \{\boldsymbol{y} \in a \,;\, (a, \in) \models F(a, \boldsymbol{y}, \vec{c})\}.$$

Autrement dit, b est dans $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$. □

2.2. Les ensembles L_α.

▶ On définit une filtration du modèle $\mathbf{L}$ par une suite croissante d'ensembles L_α dont la construction est analogue à celle de la suite des V_α mais en remplaçant l'opération $\mathfrak{P}$ par $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}$. ◀

▷ *On a jusqu'à présent construit le modèle $\mathbf{L}$ à partir d'une énumération de la clôture des ordinaux par les opérations de Gödel. Cette énumération n'est pas injective, et il n'est pas directement facile d'en déduire des propriétés fines du modèle $\mathbf{L}$, typiquement de contrôler à quel moment des sous-ensembles de ω vont cesser d'apparaître : si x est un sous-ensemble constructible de ω, il existe un premier ordinal α tel que x est c_α, mais il n'est pas clair d'obtenir de borne supérieure pour un tel ordinal α. Pour affiner la description de $\mathbf{L}$, on va en donner une description alternative à partir d'une nouvelle suite croissante d'ensembles appelés L_α, parallèles à la suite des ensembles V_α.* ◁

Comme dans les sections précédentes, on se place dans un modèle de ZF, auquel on refère en tant que $\mathbf{V}$.

Définition 2.4. (ensembles L_α) La suite d'ensembles $(L_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$ est définie par la récursion

$$L_0 := \emptyset, \quad L_{\alpha+1} := \mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(L_\alpha), \quad L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad \text{pour } \lambda \text{ limite.} \tag{2.7}$$

Exemple 2.5. (ensembles L_α) Si x est un ensemble fini, toutes les parties de x sont finies et donc définissables par extension. Il en résulte inductivement que, pour tout entier n, on a $L_n = V_n$, et, par conséquent, on a aussi $L_\omega = V_\omega$. Par contre, il n'est *a priori* pas évident que toute partie de V_ω soit définissable dans $(V_\omega, \in)$, et, donc, pas évident qu'on doive avoir $L_{\omega+1} = V_{\omega+1}$.

Lemme 2.6. *Pour chaque α, l'ensemble L_α est transitif, et on a $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$, et, sous réserve que* AC *soit satisfait, on a* $\mathrm{card}(L_\alpha) = \mathrm{card}(\alpha)$ *pour tout ordinal infini α.*

Démonstration. On raisonne par induction sur α. Les seuls points non immédiats sont le fait que $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$ entraîne $L_{\alpha+1} \cap \mathbf{Ord} = \alpha + 1$, et la cardinalité de L_α. Dans un sens, tout ordinal qui est dans $L_{\alpha+1}$ doit être inclus dans L_α, et dans $\mathbf{Ord}$ puisque la classe $\mathbf{Ord}$ est transitive, donc inclus dans α, c'est-à-dire au plus égal à α. Dans l'autre sens, α est la valeur de la formule $\mathbf{Ord}(\boldsymbol{x})$ dans l'ensemble V_α ; comme $\mathbf{Ord}(\boldsymbol{x})$ est une formule absolue et que L_α est transitive, α est la valeur de $\mathbf{Ord}(\boldsymbol{x})$ dans L_α, et donc α est définissable dans L_α.

Pour la cardinalité, on a $\mathrm{card}(L_\omega) = \mathrm{card}(V_\omega) = \aleph_0 = \mathrm{card}(\omega)$. Pour λ limite, L_λ est union d'au plus $\mathrm{card}(\lambda)$ ensembles dont chacun est, par hypothèse d'induction, au plus de cardinal $\mathrm{card}(\lambda)$, donc, par la proposition V.2.5 (dont la démonstration requiert AC), il est au plus de cardinal $\mathrm{card}(\lambda)$. Enfin, pour $\alpha = \beta + 1$, on déduit

$$\mathrm{card}(L_\alpha) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(L_\beta)) = \mathrm{card}(L_\beta) = \mathrm{card}(\beta) = \mathrm{card}(\alpha)$$

de l'égalité $\mathrm{card}(\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)) = \mathrm{card}(a)$, qui, pour tout ensemble infini a de cardinal κ, résulte de la possibilité d'énumérer (toujours par AC) à l'aide des ordinaux plus petits que κ les formules de $\underline{\mathcal{L}}_{\mathrm{ens}}$ et les suites finies d'éléments de a, donc les sous-ensembles i-définissables de a. □

▷ *On va montrer que la relation $x = L_\alpha$ est, tout comme la relation $x = c_\alpha$, une relation Δ_1^{ZF}. Comme la définition de L_α est récursive, il s'agit donc, en vue d'appliquer le lemme 1.5, d'établir que le pas de la récursion est de complexité au plus Σ_1^{ZF}.* ◁

Lemme 2.7. *Les relations $\boldsymbol{y} = \mathit{Clôt}_{\mathit{Gödel}}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{y} = \mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(\boldsymbol{x})$ sont de complexité Δ_1^{ZF}.*

Démonstration. (i) La démonstration du lemme 1.6 montre que $\mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}$ est définie récursivement à partir d'une opération $\mathbf{F}$ qui, en vertu du lemme 1.5, est de complexité $\Delta_0^{\mathsf{ZF}-}$, donc *a fortiori* Σ_1^{ZF}. Il résulte alors du lemme IX.2.19(iii) que $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{x})$ est Δ_1^{ZF}.

(ii) D'après le lemme 2.3, $\boldsymbol{y} = \mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(\boldsymbol{x})$ équivaut à $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{x} \cup \{\boldsymbol{x}\}) \cap \mathfrak{P}(\boldsymbol{x})$, donc à

$$\exists \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \cup \{\boldsymbol{x}\} \wedge \boldsymbol{z} = \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{t}) \wedge \forall \boldsymbol{u}{\in}\, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{z}) \wedge \forall \boldsymbol{u}{\in}\, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{z})),$$

qui devient une formule Σ_1^{ZF} lorsque $\boldsymbol{z} = \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{t})$ est remplacé par une formule Σ_1 qui lui est ZF-équivalente, et à

$$\forall \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{x} \cup \{\boldsymbol{x}\} \vee \boldsymbol{z} \neq \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{t}) \vee (\forall \boldsymbol{u}{\in}\, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{z}) \wedge \forall \boldsymbol{u}{\in}\, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{z}))),$$

qui devient une formule Π_1^{ZF} lorsque $\boldsymbol{z} = \mathrm{Clôt}_{\mathrm{Gödel}}(\boldsymbol{t})$ est à nouveau remplacé par une formule Σ_1 qui lui est ZF-équivalente. □

$\triangleright$ *On peut maintenant établir rapidement le lien entre la classe* $\mathbf{L}$ *et les ensembles* L_α*, et, de là, l'équivalence entre l'approche par les opérations de Gödel et les ensembles constructibles, et celle par la i-définissabilité et les ensembles* L_α. $\triangleleft$

Proposition 2.8. (absoluité de L_α) *La relation* $\boldsymbol{x} = L_{\boldsymbol{\alpha}}$ *est absolue pour les modèles intérieurs, et la classe* $\mathbf{L}$ *est la réunion des ensembles* L_α.

Démonstration. Tout comme $\boldsymbol{x} = c_{\boldsymbol{\alpha}}$, la relation $\boldsymbol{x} = L_{\boldsymbol{\alpha}}$ est définie récursivement à partir d'une opération qui est Σ_1^{ZF} : dans le cas présent, le lemme 2.7 garantit que l'opération $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}$ est Σ_1^{ZF}, et le lemme IX.2.5 garantit que l'opération $\bigcup$ est Δ_0^{ZF}. Par conséquent, le lemme 2.19(*iii*) garantit que $x = L_\alpha$ est une relation Δ_1^{ZF} et, à ce titre, elle est absolue pour les modèles intérieurs : pour tout modèle intérieur $\mathbf{M}$, on a $L_\alpha^{\mathbf{M}} = L_\alpha$, et donc, en particulier, $L_\alpha \subseteq \mathbf{M}$. Appliquant ceci au modèle intérieur $\mathbf{L}$, on conclut qu'on a $L_\alpha \subseteq \mathbf{L}$ pour tout α.

Par ailleurs, posons $\mathbf{L}' := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} L_\alpha$, ce qui fait sens puisque la suite $(L_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$ est définissable. Alors la classe $\mathbf{L}'$ est transitive comme union d'ensembles transitifs, elle contient tous les ordinaux puisque $L_{\alpha+1}$ contient α, elle est stratifiée par les ensembles L_α, et on a montré ci-dessus qu'elle est incluse dans $\mathbf{L}$. Enfin $\mathbf{L}'$ est close par les opérations de Gödel. En effet, supposons qu'on a $x, y \in L_\alpha$. Alors l'inspection des définitions montre que $\Gamma_1(x, y)$, ..., $\Gamma_3(x, y)$, $\Gamma_4(x)$, ..., $\Gamma_8(x)$ appartiennent tous à $L_{\alpha+5}$. Il en résulte que $\mathbf{L}'$ est close par opération de Gödel, et donc, par la proposition 1.13, $\mathbf{L}'$ est un modèle intérieur. Par le corollaire 1.21, on a $\mathbf{L}' \supseteq \mathbf{L}$, et, finalement, $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$. $\square$

Corollaire 2.9. *Supposons que* $\mathbf{M}$ *est une classe propre transitive modèle de* $\mathsf{ZF}-\mathsf{Par}$. *Alors on a* $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}$.

Démonstration. Soit α un ordinal quelconque. Comme $\mathbf{M}$ n'est pas incluse dans V_α, il existe x dans $\mathbf{M}$ vérifiant $\mathrm{rang}(x) \geqslant \alpha$. Comme le rang est absolu pour les classes transitives modèles de ZF^-, on a $\mathrm{rang}(x)^{\mathbf{M}} = \alpha$, d'où $\alpha \in \mathbf{M}$, et donc $\mathbf{Ord} \subseteq \mathbf{M}$. Alors, comme $\boldsymbol{x} = L_{\boldsymbol{\alpha}}$ est absolu pour $\mathbf{M}$, on trouve $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \{x \in \mathbf{M}\,;\, \mathbf{M} \models \exists\alpha(x \in L_\alpha)\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} L_\alpha = \mathbf{L}$. $\square$

Notation 2.10. ($\mathbf{V}$=$\mathbf{L}$) On note $\mathbf{V}$=$\mathbf{L}$ la formule $\forall\boldsymbol{x}$(« $\boldsymbol{x}$ est constructible »), c'est-à-dire $\forall\boldsymbol{x}\ \exists\alpha\ (\boldsymbol{x} \in L_{\boldsymbol{\alpha}})$[4].

$\triangleright$ *Ainsi, par exemple,* $\mathbf{L}$ *est un modèle de* ZF+$\mathbf{V}$=$\mathbf{L}$. *Pour les développements ultérieurs, il sera important de savoir que la classe* $\mathbf{L}$ *et les ensembles du type* L_λ *avec* λ *limite peuvent être caractérisés parmi les classes transitives par un nombre fini de formules. Le point important est ici la finitude, car elle permettra d'appliquer des résultats de réflexion.* $\triangleleft$

Corollaire 2.11. *Il existe une famille finie* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *d'axiomes de* $\mathsf{ZF}-\mathsf{Par}$ +$\mathbf{V}$=$\mathbf{L}$ *telle que* $\mathbf{L}$ *est la seule classe transitive vérifiant* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *et les ensembles* L_λ *avec* λ *limite sont les seuls ensembles transitifs vérifiant* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$.

Démonstration. Dans la démonstration du corollaire 2.9, on fait appel à l'absoluité des formules « $\boldsymbol{\alpha}$ est un ordinal », $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{rang}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = L_{\boldsymbol{\alpha}}$ pour les classes transitives modèles de ZF^-, on a fait appel aux propositions IX.2.12 et 2.8. Pour chacun des résultats d'absoluité établi dans le chapitre IX et dans le présent chapitre pour une classe transitive $\mathbf{M}$ modèle de ZF^-, la démonstration (pour l'absoluité d'une formule donnée) ne requiert que le fait que $\mathbf{M}$ satisfait un nombre fini d'axiomes de ZF^-. Par conséquent, il existe une famille finie $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{m}$ d'axiomes de ZF^- telle que les formules ci-dessus sont absolues pour toute classe transitive

[4] qu'on peut remplacer par la formule ZF-équivalente $\forall\boldsymbol{x}\ \exists\alpha\ (\boldsymbol{x} = c_{\boldsymbol{\alpha}})$

vérifiant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{m}$. Donc toute classe transitive $\mathbf{M}$ vérifiant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{m}$ satisfait $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$. Soit $\mathsf{F}_{\mathsf{m}+1}$ la formule $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$. Alors toute classe transitive $\mathbf{M}$ satisfaisant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_{\mathsf{m}+1}$ satisfait $\mathbf{M} = \mathbf{L}$.

Soit enfin $\mathsf{F}_{\mathsf{m}+2}, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ des axiomes de ZF^- prouvant la formule $\forall \boldsymbol{\alpha}\, \exists \boldsymbol{\beta}\, (\boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{\alpha})$. Puisque $\mathbf{L}$ est la seule classe transitive satisfaisant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_{\mathsf{m}+1}$, et que $\mathbf{L}$ satisfait $\mathsf{F}_{\mathsf{m}+2}, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$, puisque ce sont des axiomes de ZF^-, la classe $\mathbf{L}$ est *a fortiori* la seule classe transitive satisfaisant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$.

Supposons maintenant que M est un ensemble transitif satisfaisant $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$. Alors $\mathbf{Ord} \cap M$, qui est $\mathbf{Ord}^M$, n'a pas de plus grand élément, et est donc un ordinal limite, soit λ. Comme $(M, \in)$ satisfait $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$, la formule $\boldsymbol{x} = L_{\boldsymbol{\alpha}}$ est absolue pour M, et on trouve

$$\mathbf{L}^M = \{x \in M\,;\, M \models \exists \alpha (x \in L_\alpha)\} = \bigcup\nolimits_{\alpha < \lambda} L_\alpha = L_\lambda,$$

d'où $L_\lambda \subseteq M$, et finalement $M = L_\lambda$ puisque $(M, \in)$ satisfait $\mathsf{F}_{\mathsf{m}+1}$. □

2.3. Sous-structures élémentaires.

► On introduit la notion de sous-structure élémentaire, qui renforce la notion usuelle de sous-structure, et on établit une variante du théorème de Lowenheim–Skolem garantissant l'existence de sous-structures élémentaires. On en déduit une forme forte du schéma de réflexion dans laquelle le cardinal de l'ensemble reflétant est petit. ◄

▷ *On souhaite désormais étudier le problème du continu (généralisé) dans le modèle* $\mathbf{L}$. *Le point essentiel va consister à établir une borne supérieure sur l'ensemble des ordinaux* β *tels que* $L_{\beta+1} \setminus L_\beta$ *contient une partie de* α. *Pour cela, la méthode sera de montrer que, pour tout ensemble* L_λ *contenant une partie* a *de* α, *il existe un ordinal* $\overline{\lambda}$ *petit tel que* $L_{\overline{\lambda}}$ *ressemble suffisamment à* L_λ *et contient* a. *Cette existence provient d'un résultat de logique très général qui est une variante du théorème de Lowenheim–Skolem tel qu'établi au chapitre VII, et qui est l'objet de cette section.* ◁

Définition 2.12. (sous-structure élémentaire) Supposons que $\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{M}$ sont deux réalisations d'une logique $\mathcal{L}_\Sigma$. On dit que $\mathcal{M}_\bullet$ est une sous-structure *élémentaire* de $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}_\bullet$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$ et que, pour tout choix de $\vec{a}$ dans le domaine de $\mathcal{M}_\bullet$, et pour toute formule F de $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$,

$$\mathcal{M}_\bullet \models \mathsf{F}(\vec{a}) \quad \text{équivaut à} \quad \mathcal{M} \models \mathsf{F}(\vec{a}). \tag{2.8}$$

▷ *Si* $\mathcal{M}_\bullet$ *est une sous-structure élémentaire de* $\mathcal{M}$, *alors en particulier* $\mathcal{M}_\bullet$ *et* $\mathcal{M}$ *satisfont les mêmes formules closes, autrement dit les théories du premier ordre de* $\mathcal{M}_\bullet$ *et* $\mathcal{M}$ *coïncident.*

Une sous-structure n'a en général aucune raison d'être élémentaire. Ce qu'on a montré au chapitre VIII, c'est que l'équivalence (2.8) *est valable pour les formules sans quantificateur (lemme VIII.3.7), et, dans le contexte particulier où une relation binaire est spécifiée et où* $\mathcal{M}$ *est extension finale de* $\mathcal{M}_\bullet$, *pour les formules* Δ_0 *(proposition VIII.3.10), mais a priori pas pour des formules quelconques. Ce qu'on va montrer ci-dessous, c'est que toute structure possède des sous-structures élémentaires de cardinal pas trop grand. On commence par un critère général permettant de reconnaître les sous-structures élémentaires.* ◁

Lemme 2.13. *Supposons que* $\mathcal{M}_\bullet$ *est une sous-structure de* $\mathcal{M}$. *Une condition nécéessaire et suffisante pour que* $\mathcal{M}_\bullet$ *soit sous-structure élémentaire de* $\mathcal{M}$ *est que l'implication suivante soit vérifiée pour tous* $\vec{a}$ *dans* $\mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)$ *et toute formule* $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{y}})$

$$\mathcal{M} \models \exists \boldsymbol{x} (\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{a})) \quad \textit{entraîne} \quad \mathcal{M}_\bullet \models \exists \boldsymbol{x} (\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{a})). \tag{2.9}$$

Démonstration. On montre pour toute formule F l'équivalence

$$\mathcal{M} \models \mathsf{F}(\vec{a}) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_\bullet \models \mathsf{F}(\vec{a}) \tag{2.10}$$

par induction sur la longueur de F. Si F est sans quantificateur, l'équivalence résulte du lemme VIII.3.7. Ensuite (2.10) passe aux connecteurs booléens. Dans le cas où $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{y}})$ est $\exists\boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x},\vec{\boldsymbol{y}}))$, alors l'implication de gauche à droite est garantie par (2.9), tandis que l'implication de droite à gauche est triviale puisque le domaine de $\mathcal{M}_\bullet$ est supposé inclus dans celui de $\mathcal{M}$. Enfin, dans le cas où $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{y}})$ est $\forall\boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x},\vec{\boldsymbol{y}}))$, l'implication de gauche à droite est triviale, tandis que l'implication de droite à gauche résulte de l'application de (2.9) à $\exists\boldsymbol{x}(\neg\mathsf{G}(\boldsymbol{x},\vec{a}))$. □

▷ *La question pour construire des sous-structures élémentaires est donc de garantir les implications 2.9. Or ceci est facile, tout au moins pourvu qu'on dispose de l'axiome du choix.* ◁

Définition 2.14. (fonction de Skolem) Soit $\mathcal{M}$ une structure de type Σ et $\mathsf{F}(\boldsymbol{x},\vec{\boldsymbol{y}})$ une formule de $\mathcal{L}_\Sigma$. Une fonction h de $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})^{\mathsf{n}}$ dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$ est appelée *fonction de Skolem* pour F dans $\mathcal{M}$ si, pour tous $\vec{a}$ dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$,

$$\mathcal{M} \models \exists\boldsymbol{x}(\mathsf{F}(\boldsymbol{x},\vec{a})) \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{M} \models \mathsf{F}(h(\vec{a}),\vec{a}). \tag{2.11}$$

Lemme 2.15. (AC) *Pour toute structure $\mathcal{M}$ de type Σ et toute formule F de $\mathcal{L}_\Sigma$, il existe une fonction de Skolem pour F dans $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit F une fonction de choix sur $\mathfrak{P}(\mathrm{Dom}(\mathcal{M}))$. On définit $h(\vec{a})$ comme étant $F(\{\boldsymbol{x}\,;\,\mathcal{M} \models \mathsf{F}(\boldsymbol{x},\vec{a})\})$, si cet ensemble n'est pas vide, et $F(\mathrm{Dom}(\mathcal{M}))$, sinon. □

Proposition 2.16. (Löwenheim–Skolem) (AC) *Soit $\mathcal{M}$ une structure de type Σ, et $A \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{M})$. Alors il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{M}_\bullet$ de $\mathcal{M}$ vérifiant $A \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)$ et $\mathrm{card}(\mathcal{M}_\bullet) \leqslant \max(\mathrm{card}(A),\mathrm{card}(\Sigma),\aleph_0)$.*

Démonstration. Pour chaque formule F de $\mathcal{L}_\Sigma$, soit h_F une fonctions de Skolem pour F sur $\mathcal{M}$. On définit $M_\bullet$ comme la clôture de A dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$ par les fonctions h_F, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$ incluant A et clos par l'action des fonctions h_F. Le cardinal de $M_\bullet$ est borné supérieurement par le cardinal de A multiplié par $\aleph_0$ fois le cardinal de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_\Sigma$, qui est $\max(\mathrm{card}(\Sigma),\aleph_0)$.

Supposons que $\boldsymbol{s}$ est un symbole d'opération de Σ, et soit h la fonction de Skolem $h_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{s}(\vec{\boldsymbol{y}})}$. Pour tous $\vec{a}$ dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$, on a $\mathcal{M} \models \exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}(\vec{\boldsymbol{y}}))$, donc, pour tous $\vec{a}$, par définition, $\mathcal{M} \models h(\vec{a}) = \boldsymbol{s}(\vec{a}))$, ce qui est dire que h coïncide avec $\boldsymbol{s}^{\mathcal{M}}$. Par conséquent, l'hypothèse que $M_\bullet$ est clos par l'action de toutes les fonctions de Skolem garantit que $M_\bullet$ est en particulier clos par chacune des opérations de Σ. Il résulte du lemme VII.2.12 qu'en munissant $M_\bullet$ des opérations et relations induites par celles de $\mathcal{M}$, on obtient une sous-structure $\mathcal{M}_\bullet$ de $\mathcal{M}$.

Enfin, par construction, l'implication (2.9) est toujours satisfaite, et, en appliquant le lemme 2.13, on conclut que $\mathcal{M}_\bullet$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$. □

▷ *On revient au schéma de réflexion pour en établir une variante. Dans la proposition 1.10, on a établi que, pour toute formule $\mathsf{F}(\boldsymbol{x})$, il existe toujours un ensemble V_β qui reflète $\mathsf{F}(\boldsymbol{x})$, c'est-à-dire est tel que F soit absolue pour V_β. On observe ici qu'on peut également trouver un ensemble reflétant qui soit non pas un ensemble V_β, mais un ensemble de petite cardinalité, et, de surcroît, qu'on peut imposer que cet ensemble inclue un ensemble prescrit.* ◁

PROPOSITION 2.17. (schéma de réflexion, variante) (AC) *Pour toute classe* $\mathbf{M}$, *tout ensemble* A *inclus dans* $\mathbf{M}$ *et toute famille finie de formules* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *de* $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$, *il existe un ensemble* M *satisfaisant* $A \subseteq M \subseteq \mathbf{M}$ *et* $\mathrm{card}(M) \leqslant \max(\mathrm{card}(A), \aleph_0)$ *tel que* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *sont absolues pour* $(M, \mathbf{M})$.

DÉMONSTRATION. Pour chaque ordinal α, posons $M_\alpha := \mathbf{M} \cap V_\alpha$. Soit $\gamma := \mathrm{rang}(A) + 1$. Par construction, A appartient à M_γ. Par la proposition 1.10 appliquée aux ensembles M_α, il existe $\beta \geqslant \gamma$ tel que $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ sont absolues pour M_β. Par le théorème de Löwenheim-Skolem (proposition 2.16), il existe une sous-structure élémentaire $(M, \in)$ de $(M_\beta, \in)$ vérifiant $A \subseteq M$ et $\mathrm{card}(M) \leqslant \max(\mathrm{card}(A), \aleph_0)$. Par construction, chacune des formules F_i est absolue pour (M, M_β) et pour $(M_\beta, \mathbf{M})$, donc pour $(M, \mathbf{M})$. □

COROLLAIRE 2.18. *Soient* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *des formules ensemblistes, et* A *un ensemble transitif. Alors il existe un ensemble transitif* $\overline{M}$ *vérifiant* $A \subseteq \overline{M}$ *et* $\mathrm{card}(\overline{M}) \leqslant \max(\mathrm{card}(A), \aleph_0)$ *tel que* $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ *sont absolues pour* $(\overline{M}, \mathbf{V})$.

DÉMONSTRATION. Soit F_0 l'axiome d'extensionnalité. Par la proposition 2.17, il existe un ensemble M vérifiant $A \subseteq M$ et $\mathrm{card}(M) \leqslant \max(\mathrm{card}(A), \aleph_0)$ tel que $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ sont absolues pour $(M, \mathbf{V})$. Comme F_0 est vrai dans $(\mathbf{V}, \in)$ par hypothèse, il l'est aussi dans $(M, \in)$. Par le théorème de Mostowski (corollaire IX.4.12), il existe un isomorphisme π de $(M, \in)$ sur $(\overline{M}, \in)$, où $\overline{M}$ est un ensemble transitif. Par construction, M et $\overline{M}$ ont le même cardinal. De plus, puisque A est supposé transitif, $\pi{\restriction}_A$ est l'identité, et on a donc $A \subseteq \overline{M}$. Enfin, puisque $(M, \in)$ et $(\overline{M}, \in)$ sont isomorphes, ils satisfont les mêmes formules, et, par conséquent, $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ sont absolues pour $(\overline{M}, \mathbf{V})$. □

2.4. L'hypothèse généralisée du continu.

► On établit que l'hypothèse du continu généralisée est satisfaite dans le modèle $\mathbf{L}$. ◄

▷ *Montrer que le modèle* $\mathbf{L}$ *satisfait l'hypothèse généralisée du continu signifie montrer que, pour tout* α, *l'ensemble* L_α *a le nombre minimal possible de sous-ensembles. Par construction, tout sous-ensemble de* L_α *appartenant à* $\mathbf{L}$ *se trouve dans un ensemble* L_β, *et le lemme 2.6 borne le cardinal de chaque ensemble* L_β *: l'idée naturelle pour montrer qu'il n'y a pas beaucoup de sous-ensembles à* L_α *est d'obtenir une borne sur l'indice* β, *c'est-à-dire de montrer que toutes les parties constructibles de* L_α *s'obtiennent relativement tôt dans la hiérarchie des* L_β. *Par définition,* $L_{\alpha+1}$ *est l'ensemble de toutes les parties constructibles de* L_α *qui sont dans la clôture de Gödel de* $L_\alpha \cup \{L_\alpha\}$, *mais ceci n'implique pas que toute partie constructible de* L_α *soit dans* $L_{\alpha+1}$ *: de nouvelles parties constructibles de* L_α *peuvent apparaître plus tard dans la construction inductive, dans un passage de* L_β *à* $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(L_\beta)$ *avec* $\beta > \alpha$. *Le problème est de montrer qu'il existe néanmoins une borne supérieure pas trop grande pour l'indice* β. ◁

LEMME 2.19. *Pour tout* α *infini,* $\mathfrak{P}(L_\alpha) \cap \mathbf{L}$ *est inclus dans* L_β, *où* β *est le successeur de* $\mathrm{card}(\alpha)$ *évalué dans* $\mathbf{L}$.

DÉMONSTRATION. On se place dans le modèle $\mathbf{L}$ [5]. Supposons que A est un ensemble constructible inclus dans L_α. Soient $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_\mathsf{n}$ les formules du corollaire 2.11. L'ensemble $L_\alpha \cup \{A\}$ est transitif, et, par le schéma de réflexion dans la forme du corollaire 2.18, ce qui est légitime puisque le modèle de référence satisfait AC, il existe un ensemble transitif M vérifiant $L_\alpha \cup \{A\} \subseteq M$, soit $L_\alpha \subseteq M$ et $A \in M$, et $\mathrm{card}(M) \leqslant \max(\mathrm{card}(L_\alpha) + 1, \aleph_0)$, donc, d'après le lemme 2.6,

[5] c'est-à-dire que, partant d'un modèle $\mathcal{M}$ de ZF quelconque, on prend comme modèle de référence le modèle $\mathbf{L}^{\mathcal{M}}$

$\mathrm{card}(M) \leqslant \mathrm{card}(\alpha)$, tel que $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ sont absolues pour $(M, \mathbf{V})$. Par hypothèse, $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ sont vraies dans $\mathbf{V}$, qui est $\mathbf{L}$, donc aussi dans M. Toujours par le corollaire 2.18, il existe un ordinal limite λ tel qu'on ait $M = L_\lambda$. Si on avait $\lambda \geqslant \mathrm{card}(\alpha)^+$ dans le modèle de référence, on aurait $\mathrm{card}(L_\lambda) \geqslant \mathrm{card}(\alpha)^+ > \mathrm{card}(\alpha)$, contredisant la relation $\mathrm{card}(M) \leqslant \mathrm{card}(\alpha)$. On a donc nécessairement $\lambda \leqslant \mathrm{card}(\alpha)^+$. □

Proposition 2.20. (hypothèse du continu généralisée) *Le modèle* $\mathbf{L}$ *satisfait l'hypothèse du continu généralisée* HCG.

Démonstration. On se place dans le modèle $\mathbf{L}$. Soit κ un cardinal, et A une partie de κ. Par le lemme 2.19, $\mathfrak{P}(\kappa)$ est inclus dans L_{κ^+}, et on a donc $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(\kappa)) \leqslant \mathrm{card}(L_{\kappa^+}) = \kappa^+$, soit $2^\kappa = \kappa^+$. □

Appliquant le même procédé que dans le cas de AC, on déduit que, dans un cadre métamathématique minimal, ZF prouve l'énoncé $\mathsf{HCG}^{\mathbf{L}}$, d'où

Corollaire 2.21. (PA) *Le système* ZF *ne prouve pas* ¬HCG.

2.5. Elimination de AC et HC.

► On établit que tout résultat d'arithmétique pouvant être démontré à l'aide de l'axiome du choix et de l'hypothèse (généralisée) du continu peut être démontré sans faire appel à ceux-ci : il existe un moyen uniforme d'éliminer ces axiomes additionnels d'une éventuelle démonstration. ◄

▷ *On a vu que, si* $\mathbf{M}$ *est un modèle intérieur de* $\mathbf{V}$, *alors* $V_\omega^{\mathbf{M}}$ *coïncide avec* V_ω. *Toute formule* Δ_0 *est absolue pour* $\mathbf{M}$, *et on déduit en particulier que toute formule dont les quantifications sont restreintes à* V_ω *est absolue pour* $\mathbf{M}$. *Ceci s'applique en particulier au modèle* $\mathbf{L}$, *et, pour une telle formule, il est donc équivalent de l'établir dans* $\mathbf{V}$ *ou dans* $\mathbf{L}$. ◁

Lemme 2.22. *Toute formule d'arithmétique est* ZF*-équivalente à une formule ensembliste* Δ_0, *et plus précisément à une formule dont toutes les quantifications sont restreintes à* V_ω.

Démonstration. Par définition, toutes les variables dans une formule d'arithmétique réfère à des entiers, donc à des éléments de ω, c'est-à-dire encore à des éléments de V_ω qui sont des ordinaux. Or « être un ordinal » est une propriété Δ_0^{ZF}. Par ailleurs, une formule d'arithmétique peut mettre en jeu l'entier 0 et les opération S, $+$, et $\cdot$. Or, la formule $\boldsymbol{x} = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \emptyset$, est Δ_0 puisqu'elle équivaut à $\forall \boldsymbol{y} {\in} \boldsymbol{x} (\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y})$. Ensuite $\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x})$, c'est-à-dire $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cup \{\boldsymbol{x}\}$ est Δ_0 puisqu'elle équivaut à $\forall \boldsymbol{z} {\in} \boldsymbol{x} (\boldsymbol{z} {\in} \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \wedge \forall \boldsymbol{z} {\in} \boldsymbol{y} (\boldsymbol{z} {\in} \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x})$. Puis $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ est Δ_0 puisqu'elle équivaut à

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \omega \wedge \exists \boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{f} {\in} V_\omega (\text{« } (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{x}, \in) + (\boldsymbol{y}, \in) \text{ »}\\ &\qquad \wedge \text{« } \boldsymbol{f} \text{ est un isomorphisme de } (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}) \text{ sur } (\boldsymbol{z}, \in) \text{ »} ;\end{aligned}$$

or $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \uplus \boldsymbol{y}$, qui équivaut à

$$\begin{aligned}&\forall \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{x}\, \exists \boldsymbol{v} {\in} V_\omega\, (\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, 1) \wedge \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{t}) \wedge \forall \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{y}\, \exists \boldsymbol{v} {\in} V_\omega\, (\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, 2) \wedge \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{t})\\ &\qquad \wedge \forall \boldsymbol{v} {\in}\, \boldsymbol{t} (\exists \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{x} (\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, 1)) \vee \exists \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{y} (\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, 2))),\end{aligned}$$

s'exprime à l'aide d'une formule Δ_0 en remplaçant ci-dessus $(\boldsymbol{u}, 1)$ et $(\boldsymbol{u}, 2)$ par des définitions Δ_0. De même, l'ordre $\boldsymbol{r}$ sur $\boldsymbol{t}$ correspondant à la somme des ordres est décrit par

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \in \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' {\in}\, V_\omega (\\ &\qquad (\boldsymbol{v} {=} (\boldsymbol{u}, 1) \wedge \boldsymbol{v}' {=} (\boldsymbol{u}', 1) \wedge \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{u}') \vee\\ &\qquad (\boldsymbol{v} {=} (\boldsymbol{u}, 2) \wedge \boldsymbol{v}' {=} (\boldsymbol{u}', 2) \wedge \boldsymbol{u} {\in} \boldsymbol{u}') \vee (\boldsymbol{v} {=} (\boldsymbol{u}, 1) \wedge \boldsymbol{v}' {=} (\boldsymbol{u}', 2))),\end{aligned}$$

et, à ce titre, la formule $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ équivaut à une formule Δ_0. L'argument est le même pour la multiplication. □

PROPOSITION 2.23. (arithmétique) *Supposons que* $\mathbf{M}$ *est un modèle intérieur de* $\mathbf{V}$. *Alors* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{V}$ *satisfont les mêmes formules d'arithmétique.*

DÉMONSTRATION. Supposons que F est une formule d'arithmétique. Par le lemme 2.22, il existe une formule ensembliste F' de complexité Δ_0 qui est ZF-équivalente à F. Par le lemme IX.2.10, la formule F' est $(\mathbf{M}, \mathbf{V})$ absolue. Puisque $\mathbf{M}$ et $\mathbf{V}$ sont, par hypothèse, des modèles de ZF, il en est de même de la formule F. □

▷ *On notera que l'hypothèse que* $\mathbf{M}$ *est modèle intérieur de* $\mathbf{V}$ *est essentielle dans le résultat précédent: deux modèles quelconques de* ZF *n'ont aucune raison de satisfaire les mêmes énoncés d'arithmétique. En particulier, les formules de type* $\mathrm{Cons}_{\mathsf{T}}$ *construites au chapitre VIII sont des formules d'arithmétique, même si elles expriment des propriétés pouvant mettre en jeu des ensembles infinis. Par exemple, on a vu dans la section IX.refMOSInacc que la formule d'arithmétique* $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZF}}$ *est satisfaite dans tout modèle contenant un cardinal inaccessible, tandis que sa négation, qui est aussi une formule d'arithmétique, doit être satisfaite dans au moins un modèle de* ZF*, s'il en existe, puisque le second théorème d'incomplétude affirme que, dans ce cas,* $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZF}}$ *n'est pas prouvable à partir de* ZF*.*

Un des intérêts de la proposition 2.23 est de fournir une méthode générale permettant d'éliminer des hypothèses superflues dans les démonstrations de résultats d'arithmétique. ◁

PROPOSITION 2.24. (élimination) *Supposons que* F *est une formule d'arithmétique prouvable à partir de* $\mathsf{ZFC}+\mathsf{HCG}$*, ou, plus généralement, à partir de* $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$*. Alors* F *est prouvable à partir de* ZF*.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_n$ est une preuve de F à partir de $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$. Alors chacune des formules relativisées $\mathsf{F}_1^{\mathbf{L}}$, ..., $\mathsf{F}_n^{\mathbf{L}}$ est prouvable à partir de ZF. En effet, si F_i est un des axiomes de ZF ou est $\mathbf{V}=\mathbf{L}$, alors $\mathsf{F}_i^{\mathbf{L}}$ est prouvable à partir de ZF, puisqu'on a démontré que la classe $\mathbf{L}$ est modèle de $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$. Par ailleurs, si F_i est obtenu par coupure ou généralisation à partir de formules F_j antérieures, alors $\mathsf{F}_i^{\mathbf{L}}$ se déduit de la ou des $\mathsf{F}_j^{\mathbf{L}}$ correspondantes comme dans la démonstration de la proposition 1.23. Par conséquent, ZF prouve la formule relativisée $\mathsf{F}^{\mathbf{L}}$. Or, F étant de complexité Δ_0, elle est absolue pour $\mathbf{L}$, ce qui signifie que ZF prouve l'équivalence de F et $\mathsf{F}^{\mathbf{L}}$. Donc ZF prouve F.

L'argument s'applique en particulier pour toute formule prouvable à partir de $\mathsf{ZFC}+\mathsf{HCG}$ puisque, $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ prouvant $\mathsf{AC}+\mathsf{HCG}$, toute formule prouvable à partir de $\mathsf{ZFC}+\mathsf{HCG}$ est *ipso facto* prouvable à partir de $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$. □

▷ *L'argument d'absoluité ne s'étend pas aux niveaux plus élevés de la hiérarchie des ensembles* V_α*, en particulier au niveau* $V_{\omega+1}$ *où apparaissent les parties de* ω*. De fait, il n'y a pas de résultat général pour les formules d'arithmétique du second ordre, c'est-à-dire les formules d'arithmétique mettant en jeu des entiers et des ensembles d'entiers, lesquelles correspondent à des formules ensemblistes dont les quantifications sont bornées à* $V_{\omega+1}$*. On verra cependant au chapitre* **??** *avec le théorème de Levy–Shoenfield un résultat partiel concernant des formules suffisamment simples. Pour le moment, on peut noter l'extension suivante :* ◁

COROLLAIRE 2.25. *Supposons que* F *est une formule de la forme* $\exists \boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x}))$ *avec* G *arithmétique et que* F *est prouvable à partir de* $\mathsf{ZFC}+\mathsf{HCG}$*, ou, plus généralement, à partir de* $\mathsf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$*. Alors* F *est prouvable à partir de* ZF*.*

DÉMONSTRATION. Le même argument que ci-dessus donne $\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{F}^{\mathbf{L}}$. La formule F, étant de complexité Σ_1, est semi-absolue vers le haut, et donc ZF prouve $\mathsf{F}^{\mathbf{L}} \Rightarrow \mathsf{F}$. Donc ZF prouve F. □

▷ *Les résultats précédents indiquent donc que, même si on a des préventions quant au bien fondé de l'axiome du choix ou de l'hypothèse du continu, on peut nénamoins les utiliser libéralement dès lors qu'il s'agit d'établir une formule d'arithmétique du premier ordre, c'est-à-dire une formule ne mettant en jeu que des quantifications sur les entiers et pas les ensembles d'entiers (à l'exception éventuellement d'une quantification existentielle initiale), ni, a fortiori les ensembles d'ensembles d'entiers.*

Quoique séduisante dans son principe, la proposition 2.24 ne s'est pas révélée, jusqu'à présent, d'une efficacité pratique très grande. ◁

3. Propriétés combinatoires du modèle L

▶ On continue la description du modèle $\mathbf{L}$ en commençant par celle d'un bon ordre canonique déduit de la filtration par les ensembles L_α et son application à l'existence d'ensembles simples non Lebesgue mesurables, puis en mentionnant les principes combinatoires $\diamondsuit$ et $\square$. On conclut en discutant brièvement l'opportunité d'ajouter l'axiome $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$ aux axiomes de base de la théorie des ensembles. ◀

▷ *Ce qui précède n'est qu'une introduction très superficielle aux propriétés du modèle* $\mathbf{L}$*, lesquelles sont très riches. L'idée générale est que, à la différence des axiomes de* ZF*, qui ne spécifient que très incomplètement les ensembles, et en particulier ne décrivent pas les parties d'un ensemble mais se bornent à affirmer l'existence de certaines d'entre elles (axiomes de séparation) et le fait que, collectivement, elles forment un ensemble (axiome des parties), l'axiome additionnel* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$ *spécifie à peu près complètement les ensembles : dans le modèle* $\mathbf{L}$*, les seules parties d'un ensemble sont celles qui sont inévitables en vertu des axiomes de séparation, et on obtient ainsi une description du monde des ensembles qui est sinon complète (les théorèmes d'incomplétude l'interdisent), du moins empiriquement complète au sens informel où la plupart des énoncés combinatoires mettant en jeu les ensembles peuvent y être décidés, dans un sens ou dans l'autre. On indique ici, en général sans démonstration, quelques résultats dans cette direction.* ◁

3.1. Le bon ordre canonique de L.

▶ On déduit d'une énumération uniforme des ensembles $\mathfrak{P}_{\mathrm{def}}(a)$ un bon ordre dit canonique sur $\mathbf{L}$. ◀

▷ *Les ensembles constructibles ont été définis comme une suite d'ensembles indexée par les ordinaux, et, à ce titre, ils sont automatiquement munis d'un bon ordre, ainsi qu'on l'a noté pour montrer que* $\mathbf{L}$ *satisfait l'axiome du choix. On introduit ici un autre bon ordre sur* $\mathbf{L}$ *qui présente l'avantage de se comporter mieux vis-à-vis de la filtration par les ensembles* L_α*, à savoir de garantir que* L_β *est extension finale de* L_α *pour* $\beta \geqslant \alpha$*.* ◁

Lemme 3.1. *Il existe une opération* $\mathbf{E}$ *de complexité* Δ_1^{ZF} *telle que, si* R *est un bon ordre sur un ensemble* a*, alors* $\mathbf{E}(R)$ *est un bon ordre sur l'ensemble* $\text{Clôt}_{\text{Gödel}}(a \cup \{a\})$ *qui est une extension finale de* R*.*

Démonstration. Posons $a' := \text{Clôt}_{\text{Gödel}}(a \cup \{a\})$. Suivant la démonstration du lemme 1.6, on a $a' = \bigcup_{n<\omega} \mathbf{G}^n(a \cup \{a\})$, où $\mathbf{G}$ est l'opération « ajouter le résultat d'une application des opérations Γ_1, ..., Γ_8 ». On commence par définir deux opérations $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ faisant passer respectivement d'un bon ordre sur a à un bon ordre sur $a \cup \{a\}$, et d'un bon ordre sur a à un bon ordre sur $\mathbf{G}(a)$.

Pour $\mathbf{E}_0$, la seule possibilité pour obtenir une extension finale est, pour une relation initiale R sur a, d'ajouter a après tous les éléments de a, c'est-à-dire de définir $x\mathbf{E}_0(R)y$ par $(x, y) \in R \vee (x \in \text{Dom}(R) \wedge y = \text{Dom}(R))$. On note que cette définition est Δ_0.

Pour $\mathbf{E}_1$, supposant à nouveau que R est un bon ordre sur a, il s'agit d'ordonner les éléments de $\mathbf{G}(a)$. Par construction, chacun de ceux-ci qui n'est pas dans a est de la forme $\Gamma_i(y,z)$ ou $\Gamma_j(y)$ avec y,z dans a : cette écriture n'a aucune raison d'être unique, et il faut donc fixer un ordre d'énumération. Pour x dans $\mathbf{G}(a)$, on note $i(x)$ le plus petit indice tel que x soit de la forme $\Gamma_i(...)$, et $c_1(x)$ le R-plus petit élément de a tel que x soit $\Gamma_{i(x)}(y)$ (cas $i(x) \geqslant 4$) ou soit $\Gamma_{i(x)}(y,z)$ pour au moins un élément z de a (cas $i(x) \leqslant 3$), et enfin $c_2(x)$ le R-plus petit élément z de a tel que x soit $\Gamma_{i(x)}(c_1(c),z)$ (cas $i(x) \leqslant 3$). On ordonne alors $\mathbf{G}(a)$ en déclarant $(xx,x') \in \mathbf{E}_1(R)$ si ou bien x,x' sont dans a et on a $(x,x') \in R$, ou bien x est dans a et x' n'y est pas, ou bien ni x ni x' ne sont dans a et le triplet $(i(x),c_1(x),c_2(x))$ est avant le triplet $(i(x'),c_1(x'),c_2(x'))$ dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire qu'on a ou bien $i(x) < i(xx')$, ou bien $i(x) = i(x')$ et $c_1(x) < c_1(x')$, ou bien $i(x) = i(x') \leqslant 3$ et $c_1(x) = c_1(x')$ et $c_2(x) < c_2(x')$. Il doit être clair que $\mathbf{E}_1(R)$ est un bon ordre sur $\mathbf{G}(a)$ extension finale de R. De plus, on note que $\mathbf{E}_1$ est une opération Δ_0.

Soit alors $\mathbf{E}$ l'opération consistant à appliquer une fois $\mathbf{E}_0$ puis ω fois $\mathbf{E}_1$. Alors $\mathbf{E}$ fait alors passer d'un bon ordre initial sur a à un bon ordre sur $\text{Clôt}_{\text{Gödel}}(a \cup \{a\})$, extension finale du premier. De plus, puisque $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{E}_1$ sont Δ_0, l'opération $\mathbf{E}$ est certainement Δ_1^{ZF} en vertu du lemme 1.19. □

Définition 3.2. (bon ordre canonique) Pour tout ordinal α, on définit une relation $<_\alpha$ par les conditions récursives suivantes : $<_0$ est vide, $<_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} <_\lambda$ pour λ limite, et $<_{\alpha+1} = \mathbf{E}(<_\alpha)$. On définit le *bon ordre canonique* de $\mathbf{L}$ comme étant la réunion $<_\mathbf{L}$ de toutes les relations $<_\alpha$.

Le vocabulaire précédent est cohérent en vertu du résultat suivant :

Proposition 3.3. (bon ordre canonique) (*i*) *Pour tout α, la relation $<_\alpha$ est un bon ordre sur L_α, et, pour $\alpha \leqslant \beta$, le bon ordre $<_\beta$ est extension finale du bon ordre $<_\alpha$. La relation $\boldsymbol{x} = <_\alpha$ est de complexité Δ_1^{ZF}.*

(*ii*) *La relation $<_\mathbf{L}$ est un bon ordre sur la classe $\mathbf{L}$, et elle est de complexité Σ_1^{ZF}.*

Démonstration. (*i*) Que $<_\alpha$ soit un bon ordre sur L_α résulte d'une induction immédiate vue la construction récursive des ensembles L_α. Que $\boldsymbol{x} = <_\alpha$ ait une définition Δ_1^{ZF} résulte du lemme 1.19 puisque l'opération $\mathbf{E}$ utilisée dans la récursion aux étapes successeurs est elle-même de complexité Δ_1^{ZF}, de même que l'opération $\bigcup$ utilisée aux étapes limites.

(*ii*) Que l'union des $<_\alpha$ soit un ordre résulte du fait que les ordres $<_\alpha$ sont deux à deux compatibles. Si x,y sont deux ensembles constructibles, il existe un ordinal α tel que x et y sont dans L_α, et ils sont donc comparables pour $<_\alpha$, ce qui garantit que $<_\mathbf{L}$ est total et, de là, bon. Enfin, $\boldsymbol{x} <_\mathbf{L} \boldsymbol{y}$ est défini par $\exists \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x} <_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{y})$, et, à ce titre, est de complexité (au plus) Σ_1^{ZF} puisque $\boldsymbol{x} <_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{y}$ est de complexité Δ_1^{ZF}. □

3.2. Mesurabilité des ensembles projectifs.

▶ Puisque le modèle $\mathbf{L}$ satisfait l'axiome du choix, il satisfait aussi la propriété qu'il existe des ensembles de réels non mesurables pour la mesure de Lebesgue. On montre ici que, dans $\mathbf{L}$, il existe des ensembles de réels non mesurables qui sont de surcroît simples au sens de la hiérarchie projective de Luzin. ◀

▷ *On sait que tout sous-ensemble Borélien de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est universellement mesurable, donc, en particulier, est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Il en est de même* *de tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est la projection d'un ensemble Borélien de $\mathbb{R}^m$ avec $m \geqslant n$ — ensembles dits analytiques — et, de là, pour les complémentaires de tels ensembles — ensembles dits complémentaires d'analytiques ou CA.* ◁

QUESTION 3.4. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est projection d'un complémentaire d'analytique est-il mesurable pour la mesure de Lebesgue?*

PROPOSITION 3.5 (mesurabilité). *Dans le modèle* **L**, *la réponse à la question 3.4 est négative : il existe un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui est projection d'un complémentaire d'analytique et n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue.*

DÉMONSTRATION. Soit $\prec$ la restriction à $\mathbb{R}$ du bon ordre canonique $<_{\mathbf{L}}$ de **L**. Alors $\prec$ est un bon ordre sur les réels. Comme $<_{\mathbf{L}}$ est défini par une formule Σ_1, il est facile de montrer que sa restriction à $\mathbb{R}$ est la projection d'un complémentaire d'analytique. Le théorème de Fubini implique alors que $\prec$, vu comme une partie de $\mathbb{R}^2$, ne peut être mesurable. En effet, l'hypothèse du continu étant satisfaite dans **L**, l'ensemble bien ordonné $(\mathbb{R}, \prec)$ est isomorphe à $(\omega_1, <)$. Donc, pour tout réel a, l'ensemble des b vérifiant $x \prec a$ est dénombrable, donc de mesure 0, tandis que l'ensemble des x vérifiant $a \prec x$ est de complémentaire dénombrable, donc de mesure 1. Si $\prec$ était mesurable, on aurait

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_{\prec}(x,y)dxdy &= \int_0^1 (\int_0^1 \mathbf{1}_{\prec}(x,y)dx)dy = \int_0^1 0dy = 0\\ &= \int_0^1 (\int_0^1 \mathbf{1}_{\prec}(x,y)dy)dx = \int_0^1 1dy = 1.\end{aligned}$$

L'hypothèse que $\prec$ est mesurable est donc contradictoire. □

3.3. Principes combinatoires $\diamondsuit_\kappa$ et $\square_\kappa$.

► On énonce les principes $\diamondsuit_\kappa$ et $\square_\kappa$, qui permettent de décrire très précisément la combinatoire des cardinaux dans le modèle **L**. ◄

▷ *La construction du modèle intérieur $(\mathbf{L}, \in)$ comme clôture des ordinaux par les opérations de Gödel et les phénomènes d'absoluité qui en résultent donnent à ce modèle des propriétés combinatoires paradoxales. Le principe $\diamondsuit$ est un énoncé combinatoire simple qui est à l'origine d'un bon nombre de telles propriétés.* ◁

DÉFINITION 3.6. (principe $\diamondsuit$) On appelle $\diamondsuit$ l'assertion suivante: il existe une suite d'ensembles $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ vérifiant $S_\alpha \subseteq \alpha$ pour tout α et telle que

(3.1) pour *tout* $A \subseteq \omega_1$, l'ensemble $\{\alpha < \omega_1 \,;\, A \cap \alpha = S_\alpha\}$ est stationnaire.

Ce résultat suggère qu'il existe très peu de sous-ensembles de ω_1 puisqu'il affirme l'existence d'une suite uniforme $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ telle que tout sous-ensemble de ω_1, lorsqu'on le coupe au niveau α, coïncide avec S_α pour une infinité de α. En particulier :

LEMME 3.7. *Le principe $\diamondsuit$ entraîne* HC.

DÉMONSTRATION. Soit A une partie de ω. Supposons que $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ témoigne de ce que $\diamondsuit$ est vrai. Soit $S := \{\alpha < \omega_1 \,;\, A \cap \alpha = S_\alpha\}$. Par hypothèse, S est stationnaire. Comme l'ensemble $\{\alpha < \omega_1 \,;\, \alpha \geqslant \omega\}$ est clos cofinal, l'intersection de S avec $\{\alpha < \omega_1 \,;\, \alpha \geqslant \omega\}$ est stationnaire, donc non vide. Il existe donc $\alpha \geqslant \omega$ tel qu'on ait $A = A \cap \alpha = S_\alpha$. Comme il existe ω_1 ensembles S_α, il existe au plus ω_1 parties dans ω, donc HC est satisfaite. □

Proposition 3.8. (principe $\diamondsuit$) *Le principe $\diamondsuit$ est satisfait dans le modèle* $\mathbf{L}$.

Esquisse de démonstration. On utilise le bon ordre canonique $<_{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{L}$ pour construire récursivement une double suite $(S_\alpha, C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ où S_α est un ensemble attestant que $\diamondsuit$ est satisfait, et où C_α est un sous-ensemble clos cofinal de α tel que C_α est disjoint de $\{\beta < \alpha\,;\, S_\alpha \cap \beta = S_\beta\}$, s'il en existe. Le bon ordre de $\mathbf{L}$ permet de choisir le couple (S_α, C_α) comme le premier satisfaisant la propriété, et un phénomène d'absoluité permet alors de montrer qu'il ne peut exister de partie A de ω_1 contredisant le fait que la suite $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ témoigne de la propriété $\diamondsuit$. □

▷ *Parmi les nombreuses conséquences du principe $\diamondsuit$ figure la négation de l'hypothèse de Souslin, à savoir l'existence d'un ensemble totalement ordonné, dense, sans plus petit ni plus grand élément, tel que toute famille d'intervalles deux à deux disjoints est dénombrable, et néanmoins non isomorphe à $(\mathbb{R}, <)$. Par conséquent, dans le modèle $\mathbf{L}$, l'hypothèse de Souslin est fausse.*

Pour terminer, on mentionne une extension de $\diamondsuit$ de $\aleph_1$ à tout cardinal non dénombrable, et un autre principe combinatoire, $\Box_\kappa$. ◁

Définition 3.9. (principes $\diamondsuit_\kappa$ et $\Box_\kappa$) (i) Pour κ cardinal régulier non dénombrable, on appelle $\diamondsuit_\kappa$ l'assertion : il existe une suite d'ensembles $(S_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ vérifiant $S_\alpha \subseteq \alpha$ pour tout α et telle que

(3.2) pour *tout* $A \subseteq \kappa$, l'ensemble $\{\alpha < \kappa\,;\, A \cap \alpha = S_\alpha\}$ est stationnaire.

(ii) Pour κ cardinal non dénombrable, on appelle $\Box_\kappa$ l'assertion : il existe une suite d'ensembles $(C_\alpha)_{\alpha \text{ limite}<\kappa^+}$ telle que

- C_α est un clos cofinal de α,
- si β est point limite de C_α, alors on a $C_\beta = C_\alpha \cap \beta$,
- pour α vérifiant $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa$, on a $\mathrm{card}(C_\alpha) < \kappa$.

Proposition 3.10. ($\diamondsuit_\kappa$ et $\Box_\kappa$) (i) *Pour tout cardinal régulier κ non dénombrable, le principe $\diamondsuit_\kappa$ est satisfait dans* $\mathbf{L}$.

(ii) *Pour tout cardinal κ non dénombrable, le principe $\Box_\kappa$ est satisfait dans* $\mathbf{L}$.

▷ *La démonstration des principes combinatoires $\diamondsuit_\kappa$ et, surtout, $\Box_\kappa$, dans le modèle $\mathbf{L}$ est très délicate, et nécessite de développer ce qui a été appelé la structure fine de $\mathbf{L}$. Très grossièrement, il s'agit, par l'intermédiaire de codages subtils, d'étendre aux formules ensemblistes quelconques des résultats initialement démontrés pour les seules formules Σ_1. Les principes $\diamondsuit_\kappa$ et $\Box_\kappa$ apparaissent notamment comme directement responsables du comportement de l'exponentiation cardinale, et jouent un rôle technique important dans la suite de l'étude du modèle $\mathbf{L}$, et de divers modèles construits sur le même schéma.* ◁

3.4. L'axiome V=L est-il vrai ?

► La propriété « tout ensemble est constructible » est exprimable par la formule ensembliste $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$. C'est un axiome qu'on pourrait proposer d'ajouter au système ZFC pour en lever certaines ambiguïtés. Comme avec chaque nouvel axiome potentiel, la question se pose en termes d'opportunité et d'intuitions. Dans le cas présent, il n'existe aucun consensus en faveur d'un tel axiome. ◄

▷ *Tout ensemble est-il constructible ? La présentation faite ci-dessus décrit les ensembles constructibles comme des ensembles particuliers, et suggère de ce fait l'existence d'ensembles non constructibles. D'un autre côté, on a montré que* $(\mathbf{L}, \in)$ *est un modèle de* ZF *: si le fait que les ensembles satisfont les axiomes de* ZF *est la seule propriété retenue comme avérée, autrement dit si* $(\mathbf{V}, \in)$ *peut être un modèle quelconque de* ZF*, alors rien n'exclut a priori l'égalité* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$*, qui s'exprime par la formule ensembliste* $\forall \boldsymbol{x}\, \exists \boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{x} \in L_{\boldsymbol{\alpha}})$*, et qui peut apparaître comme un candidat naturel pour compléter l'axiomatisation des ensembles.*

Comme avec les autres énoncés tels AC *ou* HC *sur lesquels l'intuition est a priori incertaine, deux questions se posent pour l'axiome* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$*, à savoir celle de déterminer si lui ou sa négation est prouvable, et celle, distincte, de l'opportunité de l'inclure dans les axiomes de base de la théorie des ensembles.*

Pour la question de ce qui prouvable, ZF*, sauf s'il est inconsistant, ne prouve certainement pas* $\neg(\mathbf{V}{=}\mathbf{L})$*, puisque cet axiome est vérifié dans le modèle* $\mathbf{L}$*. Pour ce qui est de savoir si* ZF *prouve* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$*, la réponse, négative, ne sera établie qu'au chapitre suivant.*

Pour la question de ce qui est opportun — une fois acquis le point que ZF *ne prouve ni ne réfute* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$ *— les arguments ne peuvent que refléter une opinion provenant d'une familiarité avec les différents systèmes possibles. D'un mot, si on cherche une approche prédicative dans laquelle seuls des objets définis apparaissent, l'option* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$ *pourrait être raisonnable ; si on imagine plutôt la classe des ensembles comme un cadre universel où le monde mathématique s'inscrive, un cadre général pour le calcul ensembliste à la façon dont un corps algébriquement clos peut constituer un cadre général pour le calcul algébrique, alors, de même qu'il serait étrange de réduire l'étude des corps à celle des sous-corps premiers, il apparaîtrait très réducteur d'adjoindre systématiquement l'axiome* $\mathbf{V}{=}\mathbf{L}$ *qui — on le verra au chapitre* **??** *— exclut de nombreuses possibilités de développement ultérieures. La position généralement adoptée à ce jour est donc de considérer les ensembles constructibles et le modèle* $\mathbf{L}$ *comme d'intéressants objets d'étude, mais pas comme épuisant l'intégralité de notre intuition de la notion d'ensemble.* ◁

Exercices

Exercice 1. Montrer que, si T est une famille finie de formules de $\mathcal{L}_{\text{ens}}$ prouvables à partir de ZF, alors, sauf si ZF est contradictoire, il existe un axiome de ZF qui n'est pas prouvable à partir de T. [Utiliser le schéma de réflexion.]

Exercice 2. (*i*) Montrer que les opérations Σ_1^{ZF} sont closes par composition. (*ii*) Montrer que, si $\mathbf{F}$ est une opération Σ_1^{ZF}, alors $\mathrm{Dom}(\mathbf{F})$ est une classe Σ_1^{ZF} et que si, de plus, $\mathrm{Dom}(\mathbf{F})$ est une classe Δ_1^{ZF}, alors $\mathbf{F}$ est une opération Δ_1^{ZF}.