MMFAI
Logique (P. Dehornoy)

lundi 31 janvier 2005, 14 heures
Salle Cartan

Durée: 3 heures
Documents autorisés: Polycopié et notes personnelles, *pas* de livre

La qualité de la présentation et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation — ce qui ne signifie pas qu'il faut délayer. Le barème (sur beaucoup plus de 20 points) est donné à titre indicatif, et il sera adapté en fonction des notes ; une quotation plus élevée correspond à une question plus difficile **ou** plus longue. Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Question 1 (2 pts)**.** Montrer, en séparant les cas α successeur et α limite, que, pour α ordinal au moins égal à 2, les relations $(\forall\beta, \gamma < \alpha)(\beta + \gamma < \alpha)$ et $(\forall\beta < \alpha)(\beta + \alpha = \alpha)$ sont équivalentes.

Exercice 2

Question 2 (3 + 1 + 1 + 1 pts)**.** (*i*) Admettant que PA_1 prouve $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{x}{+}\mathbf{y} = \mathbf{y}{+}\mathbf{x})$, montrer en utilisant une induction sur $\mathbf{x}$ que PA_1 prouve l'existence de la division euclidienne sous la forme

$$(*) \qquad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y})(\exists \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})(\mathbf{x} = \mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}{+}\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}{+}\mathbf{r} = \mathbf{y}).$$

(*ii*) Justifier rapidement le fait que la structure $\mathcal{N}$ formée par les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ à coefficient dominant positif munis des opérations usuelles est un modèle de PA_*.
(*iii*) Peut-on diviser X par 2 dans $\mathcal{N}$?
(*iv*) Qu'en déduit-on pour $(*)$?

Problème

On étudie la notion d'ultraproduit de structures, qui est un produit quotienté au moyen d'un ultrafiltre. On commence par le cas général, puis on considère brièvement le cas de l'arithmétique, et ensuite celui des modèles de ZFC. Les seuls résultats de la partie 1 nécessaires pour la suite sont les relations (1) et (2). Les parties 3 et 4 sont indépendantes de la partie 2.

1. Ultraproduits

Soient $\mathbf{\Sigma}$ une signature, $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ une famille de structures de type $\mathbf{\Sigma}$, et U un ultrafiltre sur I. On définit une structure $\mathcal{P}$ comme suit :

• le domaine de $\mathcal{P}$ est le produit cartésien $\prod_{i\in I} \mathrm{Dom}\mathcal{S}_i$ [1] ;

• les opérations de $\mathcal{P}$ sont déduites composante par composante de celles des $\mathcal{S}_i$: pour $\mathtt{s}$ symbole d'opération $\mathtt{k}$-aire, on a

$$\mathtt{s}^{\mathcal{P}}(f_1, \dots, f_{\mathtt{k}})(i) = \mathtt{s}^{\mathcal{S}_i}(f_1(i), \dots, f_{\mathtt{k}}(i))\,;$$

• les relations de $\mathcal{P}$ sont déduites composante par composante *modulo* U de celles des $\mathcal{S}_i$: pour $\mathtt{r}$ symbole d'opération $\mathtt{k}$-aire, en notant $(\forall^U i)(\mathtt{F}(i))$ pour $\{i \in I\,;\,\mathtt{F}(i)\} \in U$, on a

$$\mathtt{r}^{\mathcal{P}}(f_1, \dots, f_{\mathtt{k}}) \Longleftrightarrow (\forall^U i)(\mathtt{r}^{\mathcal{S}_i}(f_1(i), \dots, f_{\mathtt{k}}(i))).$$

Question 3 (2 pts)**.** Pour f, f' dans $\mathrm{Dom}\mathcal{P}$, on note

$$f \equiv f' \quad \text{pour} \quad (\forall^U i)(f(i) = f'(i)), \quad \text{c'est-à-dire } \{i \in I\ ;\ f(i) = f'(i)\} \in U.$$

Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence compatible[2] avec les opérations et les relations de $\mathcal{P}$.

Pour f dans $\mathrm{Dom}\mathcal{P}$, on note $[f]$ la classe de f pour $\equiv$, et on définit l'*ultraproduit* $\prod \mathcal{S}_i/U$ des $\mathcal{S}_i$ par U comme la structure-quotient $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ par $\equiv$ [3].

Question 4 (3 pts)**.** Montrer par induction sur la complexité de $\mathtt{t}$ que, pour tout terme $\mathtt{t}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{\mathtt{p}})$ de $\mathbf{L}_{\mathbf{\Sigma}}$, et pour tous f_1, … , $f_{\mathtt{p}}$ dans $\mathrm{Dom}\mathcal{P}$, on a

$$\mathtt{t}^{\mathcal{Q}}([f_1], \dots, [f_p]) = [f] \quad \text{avec} \quad f(i) = \mathtt{t}^{\mathcal{S}_i}(f_1(i), \dots, f_p(i)).$$

Question 5 (4 pts)**.** Montrer par induction sur la complexité de $\mathtt{F}$ que, pour toute formule $\mathtt{F}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{\mathtt{p}})$ de $\mathbf{L}_{\mathbf{\Sigma}}$, et pour tous f_1, … , $f_{\mathtt{p}}$ dans $\mathrm{Dom}\mathcal{P}$, on a

$$(1) \qquad \mathcal{Q} \models \mathtt{F}([f_1], \dots, [f_p]) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall^U i)(\mathcal{S}_i \models \mathtt{F}(f_1(i), \dots, f_p(i))).$$

Question 6 (1 + 1 pt)**.** Pour $\mathcal{S}$ structure de type $\mathbf{\Sigma}$, on note $\mathcal{S}^I/U$, ou simplement $\mathcal{S}^*$, l'ultraproduit $\prod\mathcal{S}_i/U$ où $\mathcal{S}_i$ est $\mathcal{S}$ pour tout i, et on l'appelle l'*ultrapuissance* de $\mathcal{S}$ par U.

(i) Montrer que l'application ϕ associant à tout a de $\mathrm{Dom}\mathcal{S}$ la classe de la fonction constante c_a de valeur a est un plongement élémentaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^*$, c'est-à-dire que, pour toute formule $\mathtt{F}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_p)$ de $\mathbf{L}_{\mathbf{\Sigma}}$ et tous $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathrm{Dom}\mathcal{S}$, on a

$$(2) \qquad \mathcal{S}^* \models \mathtt{F}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_p)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{S} \models \mathtt{F}(a_1, \dots, a_p).$$

(ii) En déduire que toute propriété exprimable au premier ordre est préservée par ultrapuissance.

---

[1] c'est-à-dire l'ensemble des $f : I \to \bigcup_{i\in I} \mathrm{Dom}\mathcal{S}_i$ vérifiant $f(i) \in \mathrm{Dom}\mathcal{S}_i$ pour tout i, ou encore, si on préfère, l'ensemble des suites $(a_i)_{i\in I}$ vérifiant $a_i \in \mathrm{Dom}\mathcal{S}_i$ pour chaque i — mais on conseille d'utiliser ici la notation fonction

[2] c'est-à-dire que, si on a $f'_1 \equiv f_1$, … , $f'_{\mathtt{k}} \equiv f_{\mathtt{k}}$, alors on a $\mathtt{s}(f'_1, \dots, f'_{\mathtt{k}}) \equiv \mathtt{s}(f_1, \dots, f_{\mathtt{k}})$ pour chaque opération $\mathtt{s}$ et $\mathtt{r}(f'_1, \dots, f'_{\mathtt{k}}) \Leftrightarrow \mathtt{r}(f_1, \dots, f_{\mathtt{k}})$ pour chaque relation $\mathtt{r}$

[3] c'est-à-dire la structure $\mathcal{Q}$ dont le domaine est l'ensemble des classes d'équivalence $[f]$ pour f dans le domaine de $\mathcal{P}$, et dont les opérations et relations sont induites par celles de $\mathcal{P}$

2. Le cas de l'arithmétique

On considère ici la structure $(\mathbb{N}, \mathsf{0}, S, +, \cdot, \leqslant)$, avec $I = \mathbb{N}$, et U ultrafiltre non principal[4] sur $\mathbb{N}$. On note $(\mathbb{N}^*, 0^*, S^*, +^*, \cdot^*, \leqslant^*)$ l'ultrapuissance $(\mathbb{N}, \mathsf{0}, S, +, \cdot, \leqslant)^I/U$, et, comme ci-dessus, ϕ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ associant à n la classe de la fonction constante c_n de valeur n.

Question 7 (1 + 1 + 2 + 2 pts)**.** (i) Montrer que $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ plus grand que tout élément de $\mathrm{Im}\phi$.
(ii) En déduire que $(\mathbb{N}^*, 0^*, S^*, +^*, \cdot^*, \leqslant^*)$ est modèle non-standard de l'arithmétique.
(iii) Exhiber un élément de $\mathbb{N}^*$ divisible par tous les éléments de $\mathrm{Im}\phi$.
(iv) Montrer que $\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{Im}\phi$ n'a pas de plus petit élément.

3. Le cas des modèles de ZFC

On applique maintenant la construction au cas d'un modèle de ZFC dans lequel on se place, et qu'on note $(\boldsymbol{V}, \in)$. On suppose que U est un ultrafiltre sur un ensemble I de $\boldsymbol{V}$. On considère alors la relation d'équivalence $\equiv$ sur les fonctions de domaine I, et on note $(\boldsymbol{V}^*, \in^*)$ l'ultrapuissance obtenue[5]. Le point important est que (1) reste valable, c'est-à-dire que, pour toute formule $\mathbf{F}$ et pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_p$, on a

$$(3) \qquad (\boldsymbol{V}^*, \in^*) \models \mathbf{F}([f_1], \ldots, [f_p]) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall^U i)((\boldsymbol{V}, \in) \models \mathbf{F}(f_1(i), \ldots, f_p(i))).$$

On commence par la question de savoir si la relation $\in^*$ est mal ou bien fondée, c'est-à-dire[6] s'il existe ou non des suites infinies décroissantes pour $\in^*$.

Question 8 (2 pts)**.** Montrer que, pour $I = \omega$ et U non principal, $\in^*$ est mal fondée.

On revient au cas général. Pour κ cardinal infini, un ultrafiltre U est dit *κ-complet* si toute intersection de strictement moins de κ éléments de U est dans U.

Question 9 (1 pt)**.** Montrer qu'un ultrafiltre non principal sur un ensemble de cardinal κ n'est jamais κ^+-complet.

Question 10 (2 pts)**.** Montrer que $\in^*$ est bien fondée si et seulement si U est $\aleph_1$-complet.

Question 11 (1 + 2 + 1 + 2 pts)**.** On suppose $\in^*$ bien fondée. Un résultat général[7] affirme qu'il existe alors une classe transitive $\boldsymbol{M}$ et un isomorphisme $\boldsymbol{\pi}$ de $(\boldsymbol{V}^*, \in^*)$ sur $(\boldsymbol{M}, \in\restriction_{\boldsymbol{M}})$. Pour tout x dans $\boldsymbol{V}$, on pose $\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\pi}([c_x])$, où c_x est la fonction constante de valeur x.
(i) Montrer que $\boldsymbol{\phi}$ est un plongement élémentaire de $(\boldsymbol{V}, \in)$ dans $(\boldsymbol{M}, \in\restriction_{\boldsymbol{M}})$.
(ii) Montrer que $\boldsymbol{\phi}$ envoie les ordinaux dans les ordinaux, et qu'on a $\boldsymbol{\phi}(\alpha) \geqslant \alpha$ pour tout ordinal α.
(iii) Montrer que $(\boldsymbol{M}, \in\restriction_{\boldsymbol{M}})$ est un modèle intérieur de ZFC [8].
(iv) Montrer qu'on a $\boldsymbol{\phi}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha < \kappa$, puis $\boldsymbol{\phi}(x) = x$ pour tout x dans V_κ.

---

[4] c'est-à-dire ne contenant aucun singleton $\{a\}$

[5] pour éviter les problèmes d'ensembles et de classes, on peut définir $[f]$ comme l'ensemble des fonctions f' équivalentes à f et de rang minimal

[6] puisqu'on suppose AC

[7] le théorème de Mostowski, qu'on ne demande pas de démontrer

[8] c'est-à-dire est un modèle de ZFC et contient tous les ordinaux

Question 12 (3 + 1 + 3 pts)**.** Inversement, on suppose que $\boldsymbol{\phi}$ est un plongement élémentaire de $(\boldsymbol{V}, \in)$ dans un modèle intérieur $(\boldsymbol{M}, \in\restriction_{\boldsymbol{M}})$.

(*i*) Montrer par induction sur le rang de x que, si on a $\boldsymbol{\phi}(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α, alors on a $\boldsymbol{\phi}(x) = x$ pour tout x.

(*ii*) En déduire que, si $\boldsymbol{\phi}$ n'est pas l'identité, il existe un plus petit ordinal κ vérifiant $\boldsymbol{\phi}(\kappa) \neq \kappa$, puis qu'on a $\boldsymbol{\phi}(\kappa) > \kappa$.

(*iii*) Dans ce cas montrer que, si on définit $U \subseteq \mathfrak{P}(\kappa)$ par $X \in U \Leftrightarrow \kappa \in \boldsymbol{\phi}(X)$, alors U est un ultrafiltre κ-complet non principal sur κ.

4. Cardinaux mesurables

On suppose que κ est un cardinal non dénombrable et que U est un ultrafiltre κ-complet non principal sur κ.

Question 13 (2 pts)**.** Montrer que κ est un cardinal régulier.

Question 14 (2 + 2 + 2 pts)**.** On suppose $\lambda < \kappa$, et que $(Y_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ est une suite de sous-ensembles de λ. On pose $Y := \{\xi < \lambda\ ;\ (\forall^U \alpha)(\xi \in Y_\alpha)\}$, puis, pour ξ dans λ,

$$X_\xi := \begin{cases} \{\alpha < \kappa\ ;\ \xi \in Y_\alpha\} & \text{pour } \xi \in Y, \\ \{\alpha < \kappa\ ;\ \xi \notin Y_\alpha\} & \text{pour } \xi \notin Y. \end{cases}$$

(*i*) Montrer que $\alpha \in \bigcap_{\xi<\lambda} X_\xi$ entraîne $Y_\alpha = Y$.

(*ii*) Déduire que les ensembles Y_α ne peuvent être deux à deux distincts.

(*iii*) Conclure que $\lambda < \kappa$ entraîne $2^\lambda < \kappa$, donc que κ est un cardinal inaccessible.

Question 15 (2 + 3 + 2 + 2 pts)**.** On reprend les notations de la question 12. On dit qu'une fonction f *représente* un élément x de $\boldsymbol{M}$ si on a $x = \boldsymbol{\pi}([f])$.

(*i*) Montrer que, si $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ est une suite d'éléments de $\boldsymbol{M}$, que f_α représente x_α, et que f représente κ, alors F représente $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, où $F(\xi)$ est définie comme $(f_\alpha(\xi))_{\alpha<f(\xi)}$. En déduire que toute suite de longueur κ d'éléments de $\boldsymbol{M}$ est dans $\boldsymbol{M}$.

(*ii*) Etablir les inégalités $2^\kappa \leqslant (2^\kappa)^{\boldsymbol{M}} < \boldsymbol{\phi}(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

(*iii*) Montrer $(\boldsymbol{M}, \in) \models$ « $\boldsymbol{\phi}(\kappa)$ est inacessible ».

(*iv*) Déduire que U n'appartient pas à $\boldsymbol{M}$.