MMFAI — vendredi 27 janvier 2006, 14 heures
Logique (P. Dehornoy) — Salle Cartan

Durée: 3 heures
Documents autorisés: Polycopié et notes personnelles, *pas* de livre

La qualité de la présentation et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation — ce qui ne signifie pas qu'il faut délayer. Le barème est donné comme indication de longueur et de difficulté, il sera adapté en fonction des résultats. Les exercices sont indépendants, les trois premiers sont plus faciles.

Exercice 1

Question 1 (3 points)**.** Montrer que, pour tout ordinal limite λ, il y a équivalence entre

(i) la conjonction de $\alpha < \lambda$ et $\beta < \lambda$ entraîne $\alpha \cdot \beta < \lambda$;
(ii) $0 < \alpha < \lambda$ entraîne $\alpha \cdot \lambda = \lambda$;
(iii) il existe γ vérifiant $\lambda = \omega^{\omega^\gamma}$;

[Pour *cet* exercice, on pourra utiliser sans démonstration les équivalences correspondantes pour l'addition établies en TD].

Exercice 2

On note Σ la signature ne comportant qu'un symbole de relation binaire r.

Question 2 (1 + 2 points)**.** (i) Expliciter une théorie T_{eq} de L_Σ dont les modèles soient les structures M pour lesquelles r^M est une relation d'équivalence.

(ii) Expliciter une théorie T_{eqinf} de L_Σ dont les modèles soient les structures M pour lesquelles r^M est une relation d'équivalence possédant une infinité de classes d'équivalence et telle que chaque classe d'équivalence est infinie.

Question 3 (2 points)**.** On suppose que T est une théorie consistante de L_Σ admettant à isomorphisme près un unique modèle dénombrable, et n'admettant pas de modèle fini. Montrer que, quelle que soit la formule close F de L_Σ, on a soit $T \vdash \mathsf{F}$, soit $T \vdash \neg\mathsf{F}$.

Question 4 (2 points)**.** Montrer que T_{eqinf} satisfait à la condition de la question précédente.

Question 5 (2 points)**.** Soit κ un cardinal non dénombrable. Montrer que T_{eqinf} admet au moins deux modèles de cardinalité κ non isomorphes entre eux.

Exercice 3

On note F l'ensemble des fonctions pouvant s'obtenir par un nombre fini de compositions et de récursions à partir des fonctions constantes $\mathtt{const}_{\mathsf{p,m}}$ et des projections $\mathtt{proj}_{\mathsf{p,i}}$.

Question 6 (1 point)**.** Justifier le fait que F est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions primitives récursives.

Question 7 (2 + 2 points)**.** (*i*) Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{N}^{\mathsf{p}} \to \mathbb{N}$ dans F, il existe une constante C_f telle que, pour tous $\mathsf{n}_1, \dots, \mathsf{n}_{\mathsf{p}}$ dans $\mathbb{N}$, on a l'inégalité

$$f(\mathsf{n}_1, \dots, \mathsf{n}_{\mathsf{p}}) \leq \sup(C_f, \mathsf{n}_1, \dots, \mathsf{n}_{\mathsf{p}}).$$

(*ii*) En déduire que F est un sous-ensemble strict de l'ensemble des fonctions primitives récursives.

Exercice 4

Pour tout ensemble X, on note $[X]^2$ l'ensemble des paires (ensembles non ordonnés à deux éléments) d'éléments de X. On dit que X est *κ-Ramsey*, où κ est un cardinal (fini ou infini), si, pour toute fonction f de $[X]^2$ dans $\{0,1\}$, il existe une partie Y de X de cardinal κ telle que f est constante sur $[Y]^2$.

Question 8 (1 point)**.** Montrer que, si X et X' sont en bijection, alors X est κ-Ramsey si et seulement si X' est κ-Ramsey.

Donc la propriété pour X d'être κ-Ramsey ne dépend que de la cardinalité de X. On notera $R(\lambda, \kappa)$ si tout ensemble de cardinal λ est κ-Ramsey.

Dans toute la suite de l'exercice, si A, B sont des ensembles d'ordinaux distincts, on note $d(A, B)$ le plus petit élément de $A \,\Delta\, B$ — on rappelle que $A \,\Delta\, B$ désigne la différence symétrique de A et B, c'est-à-dire $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Question 9 (2 points)**.** En considérant d sur $[\mathfrak{P}(\{0,1\})]^2$, montrer que $R(4,3)$ est fausse.

Question 10 (2 + 1 points)**.** On suppose que X admet une partition $(X_\xi)_{\xi<\theta}$ en strictement moins de κ ensembles, chacun de cardinal strictement plus petit que κ.

(*i*) En considérant la fonction $f : [X]^2 \to \{0,1\}$ telle que $f(\{\alpha, \beta\})$ vaut 1 si et seulement si α et β sont dans le même X_ξ, montrer que X n'est pas κ-Ramsey.

(*ii*) Que peut-on en déduire pour les (éventuels) cardinaux infinis κ vérifiant $R(\kappa, \kappa)$?

Question 11 (1 point)**.** Pour $A, B \subseteq \omega$, on note $A \prec B$ pour $d(A, B) \in B$. Vérifier que $\prec$ est un ordre total strict sur $\mathfrak{P}(\omega)$.

Question 12 (2 + 2 + 3 + 2 points)**.** On suppose que $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ est une suite strictement croissante dans $(\mathfrak{P}(\omega), \prec)$.

(*i*) Montrer qu'il existe un entier n tel qu'on ait $d(A_\alpha, A_{\alpha+1}) = n$ pour $\aleph_1$ valeurs distinctes de α.

(ii) On suppose $\alpha < \beta$ et $d(A_\alpha, A_{\alpha+1}) = d(A_\beta, A_{\beta+1})$. Montrer que

$$A_\alpha \cap [0, d(A_\alpha, A_{\alpha+1})[\; = A_\beta \cap [0, d(A_\alpha, A_{\alpha+1})[$$

entraînerait $A_\beta < A_{\alpha+1}$; conclusion?

(iii) En déduire que l'existence d'une suite $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ comme ci-dessus est impossible.

(iv) Montrer de même que l'existence d'une suite de longueur ω_1 strictement décroissante dans $(\mathfrak{P}(\omega), \prec)$ est impossible.

Question 13 (2 + 2 points)**.** (i) Soit F une bijection d'un ordinal κ sur $\mathfrak{P}(\omega)$. On considère f de $[\kappa]^2$ dans $\{0,1\}$ telle que $f(\{\alpha,\beta\})$ vaut 1 si on a $\alpha < \beta$ et $F(\alpha) \prec F(\beta)$, ou $\alpha > \beta$ et $F(\alpha) \succ F(\beta)$[1]. Déduire de la question 12 que f ne peut être constante sur aucun sous-ensemble de cardinal $\aleph_1$.

(ii) Montrer qu'on n'a ni $R(2^{\aleph_0}, \aleph_1)$ ni $R(\aleph_1, \aleph_1)$.

Exercice 5

On montre que, si deux modèles transitifs de ZFC ont les mêmes ordinaux, alors ils coïncident. On commence par un résultat préliminaire caractérisant les relations isomorphes à la restriction de l'appartenance à un ensemble transitif.

Question 14 (2 points)**.** Pour R relation binaire sur A et y dans A, on note $\mathrm{Init}_R(y)$, ou simplement $\mathrm{Init}(y)$, le segment initial $\{x \in A \ ; \ xRy\}$. On dit que R est *extensionnelle* si $\mathrm{Init}(y) = \mathrm{Init}(y')$ entraîne $y = y'$, et que R est *bien fondée* si toute partie non vide de A possède un élément R-minimal. Montrer que, s'il existe un ensemble transitif T tel que (A, R) soit isomorphe à $(T, \in\restriction_T)$, alors R est extensionnelle et bien fondée.

Question 15 (2 + 4 points)**.** (i) Soit R une relation binaire sur un ensemble A. Une partie X de A est dite *R-close* si $x \in X$ entraîne $\mathrm{Init}(x) \subseteq X$. Montrer qu'il existe une application Clot_R de $\mathfrak{P}(A)$ dans lui-même telle que, pour tout X dans $\mathfrak{P}(A)$, $\mathrm{Clot}_R(X)$ soit la plus petite partie R-close incluant X.

(ii) Montrer que, si R est une relation bien fondée sur A, et G une application de $A \times \mathrm{Fonc}(A, B)$ dans B, il existe une unique application F de A dans B vérifiant pour tout x dans A la relation $F(x) = G(x, F\restriction_{\mathrm{Init}(x)})$.

Question 16 (3 points)**.** Montrer que, si R est une relation extensionnelle et bien fondée sur A, alors il existe un ensemble transitif T et un isomorphisme F de (A, R) sur $(T, \in\restriction_T)$ [Utiliser la question 15 pour définir récursivement F par $F(x) := \{F(y) \ ; \ yRx\}$].

On suppose maintenant que $(\boldsymbol{M}, \in\restriction_{\boldsymbol{M}})$ et $(\boldsymbol{N}, \in\restriction_{\boldsymbol{N}})$ sont deux modèles transitifs de ZFC contenant les ordinaux, et contenant les mêmes ensembles d'ordinaux.

Question 17 (2 + 1 points)**.** (i) Montrer qu'il existe une bijection absolue de **Ord** $\times$ **Ord** sur **Ord**.

(ii) En déduire que $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ contiennent les mêmes ensembles de couples d'ordinaux.

---
[1] c'est-à-dire si $<$ transporté par F et $\prec$ sont d'accord

Question 18 (1 + 1 + 3 + 2 points)**.** Soit A dans $\boldsymbol{M}$ quelconque.

(i) Justifier l'existence d'un ordinal θ et d'une fonction f dans $\boldsymbol{M}$ telle que f est une bijection de θ sur la clôture transitive de $\{A\}$ [on rappelle que la clôture transitive de X est le plus petit ensemble transitif incluant X, à savoir $X \cup \bigcup X \cup \bigcup\bigcup X \cup ...$].

(ii) Dans $\boldsymbol{M}$ on définit une relation R sur θ par

$$\alpha R \beta \iff f(\alpha) \in f(\beta).$$

Montrer que, dans $\boldsymbol{M}$, la relation R est extensionnelle et bien fondée.

(iii) Montrer que R appartient à $\boldsymbol{N}$, et que, dans $\boldsymbol{N}$, c'est une relation extensionnelle et bien fondée [on observera qu'être bien fondé est une proprité absolue car exprimable à la fois par une formule Σ_1 et par la négation d'une formule Σ_1].

(iv) En déduire que A est dans $\boldsymbol{N}$, et que $\boldsymbol{M}$ est inclus dans $\boldsymbol{N}$. Conclure.

Exercice 6

Question 19 (2 + 5 + 2 pts)**.** (i) Montrer que, si ZFC est consistant, alors il en est de même de $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{Cons}_{\mathsf{ZFC}}$.

(ii) Montrer que $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{Cons}_{\mathsf{ZFC}}$ ne possède pas de modèle standard, c'est-à-dire tel que ω soit le sup des ordinaux $S^n(\varnothing)$ pour n dans $\mathbb{N}$.

(iii) Conclusion?

Deux questions supplémentaires, à ne traiter qu'après toutes les autres

Question 20 (Suite de l'exercice 4, 2 + 2 + 2 points)**.** On considère $f : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$, et on construit par récurrence une suite $(X_n)_{n\in\omega}$ de parties de ω. On part de $X_0 = \omega$.

(i) Supposant X_n construit, montrer qu'il existe X_{n+1} infini, inclus dans $X_n \setminus \{\inf X_n\}$, et tel que la valeur de $f(\{\inf X_n, x\})$ ne dépend pas du choix de x dans X_{n+1}.

(ii) Montrer qu'il existe I infini tel que la valeur de $f(\{\inf X_i, \inf X_j\})$ pour i, j dans I ne dépend ni de i ni de j.

(iii) En déduire qu'on a $R(\aleph_0, \aleph_0)$.

Question 21 (Suite de l'exercice 5, 2 + 2 + 2 points)**.** (i) On affaiblit les hypothèses en ne supposant plus que $(\boldsymbol{N}, \in\restriction_{\boldsymbol{N}})$ satisfait AC. Que reste-t-il de la question 18?

(ii) Soit A dans $\boldsymbol{N}$ inclus dans $\boldsymbol{M}$. Montrer qu'il existe B dans $\boldsymbol{M}$ tel que A soit inclus dans B.

(iii) Soit f une bijection d'un ordinal θ sur B dans $\boldsymbol{M}$. Montrer que $f^{-1}(A)$ est dans $\boldsymbol{M}$, puis que A est dans $\boldsymbol{M}$.

(iv) Déduire de ce qui précède que $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ coïncident.