FIMFA — vendredi 19 janvier 2007, 13 heures 30
Logique (P. Dehornoy) — Salle Henri Cartan

Examen terminal
Durée: 3 heures
Documents autorisés: Polycopié et notes personnelles, **pas de livre**

La qualité de la présentation et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation — ce qui ne signifie pas qu'il faut délayer.

Le barème est donné comme indication de longueur et de difficulté. Le sujet est long et probablement difficile à traiter dans le temps imparti : ne pas s'en inquiéter, le barême final sera adapté en fonction des résultats.

Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

On définit l'ensemble des *fonctions élémentaires* comme le plus petit ensemble de fonctions entières (c'est-à-dire de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ pour un certain k) vérifiant les propriétés suivantes :

- les projections $\mathsf{proj}_{p,i}$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires,
- l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de l'égalité de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires,
- si g de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_k$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires, alors leur composée $g \circ (f_1, \ldots, f_k)$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire,
- si f de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire, alors la somme bornée et le produit borné respectivement définis par
$$(x_1, \ldots, x_p, x) \mapsto \sum_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i) \quad \text{et} \quad (x_1, \ldots, x_p, x) \mapsto \prod_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i)$$
de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

question 1 (2 points)**.** Montrer que, pour tout k, les fonctions constantes égales à k (notées $\mathsf{const}_{p,k}$) de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

question 2 (2 points)**.** Montrer que la fonction exponentielle exp de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\mathsf{exp}(m, n) = m^n$ est élémentaire.

question 3 (1+1+4+2 points)**.** On définit la fonction T de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par $\mathsf{T}(m, 0) = m$ et $\mathsf{T}(m, n+1) = \mathsf{exp}(2, \mathsf{T}(m, n))$. Pour n dans $\mathbb{N}$, on note T_n la fonction $m \mapsto \mathsf{T}(m, n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(*i*) Montrer que T est primitive récursive.

(*ii*) Montrer que $(m, n) \mapsto \mathsf{T}(m, n)$ est strictement croissante en n à m fixé et strictement croissante en m à n fixé.

(iii) On dit qu'une fonction f de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est *dominée* par la fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si, pour tout $(n_1, \ldots, n_p)$ dans $\mathbb{N}^p$, on a $f(n_1, \ldots, n_p) \leq g(\max(n_1, \ldots, n_p))$. Montrer que, pour toute fonction élémentaire f, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que f est dominée par T_n.

(iv) Montrer que T n'est pas élémentaire.

Exercice 2

Soit Σ la signature $\{0^c, S_1^o, \leq_2^r\}$. Soit $\mathcal{N}$ la structure obtenue à partir de $\mathbb{N}$ en interprétant les symboles de Σ par zéro, successeur et l'ordre des entiers. On note T la théorie de $\mathcal{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_\Sigma$ vraies dans $\mathcal{N}$.

question 4 (2 points)**.** Montrer que, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T et si m est un élément de $\mathcal{M}$, alors l'ensemble des majorants stricts de m admet un plus petit élément.

question 5 (2 points)**.** Montrer que l'ordinal $\omega + \omega$ n'est pas un modèle de T.

question 6 (1 point)**.** Montrer que, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T, alors $\mathcal{N}$ est isomorphe à un sous-ensemble du domaine de $\mathcal{M}$.

question 7 (3 points)**.** Montrer qu'il existe un modèle dénombrable de T non isomorphe à $\mathcal{N}$.

question 8 (2 points)**.** Montrer que tous les modèles dénombrables de T qui sont bien ordonnés sont isomorphes à $\mathcal{N}$.

question 9 (4 points)**.** Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné dénombrable. Montrer qu'il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T tel que $(E, \preccurlyeq)$ est isomorphe (en tant qu'ensemble ordonné) à un sous-ensemble du domaine de $\mathcal{M}$.

Exercice 3

On considère une signature contenant au moins un symbole de constante. Un terme est dit *clos* s'il ne contient pas de variable. Soit $\mathsf{F}(x)$ une formule sans quantificateur contenant x comme seule variable libre. On souhaite prouver le *théorème de Herbrand* :

> *Si $\exists x(\mathsf{F}(x))$ est prouvable en logique du premier ordre, alors il existe des termes clos t_1, …, t_n tels que $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_n)$ est prouvable.*

Un ensemble de termes clos U est un *univers de Herbrand* pour F si

- U est non vide,
- si c est un symbole de constante apparaissant dans F, alors c est dans U,
- si f est un symbole d'opération d'arité k apparaissant dans F, et si t_1, …, t_k sont des éléments de U, alors $f(t_1, \ldots, t_k)$ est dans U

question 10 (1 point)**.** Montrer comment construire un univers de Herbrand U dénombrable (ou fini) pour F.

question 11 (3+3 points)**.** Soit U un univers de Herbrand dénombrable pour F. On suppose que, quelle que soit la suite finie de termes $t_1, \ldots, t_n$ de U, la formule $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_n)$ n'est pas prouvable.

(i) Montrer que la théorie $\mathsf{T} = \{\neg\mathsf{F}(t)\,;\, t \in U\}$ est consistante.

(ii) Construire un modèle de T dont tous les éléments sont interprétations d'éléments de U et montrer qu'il ne satisfait par $\exists x(\mathsf{F}(x))$.

question 12 (2 points)**.** Prouver le théorème de Herbrand.

Problème

On étudie les ensembles dits *héréditairement de cardinal* $< \kappa$, montrant en particulier qu'ils forment un modèle de $\mathsf{ZFC}-\mathsf{Par}$, où Par désigne l'axiome des parties. Dans toute la suite, la lettre κ désigne toujours un cardinal infini (sans qu'on le répète à chaque fois). On suppose tous les axiomes de ZFC satisfaits.

question 13 (2+2+2+3 points)**.** On rappelle que le *rang* d'un ensemble a est l'unique ordinal α tel que a est dans $V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, et que $a \in b$ entraîne $\mathrm{rang}(a) < \mathrm{rang}(b)$.

(i) Montrer que, pour tout ensemble a, on a

$$\mathrm{rang}(a) = \inf\{\alpha\,;\, \forall x{\in}a(\mathrm{rang}(x) < \alpha)\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rang}(a) = \sup\{\mathrm{rang}(x) + 1\,;\, x \in a\}. \tag{2}$$

(ii) Montrer qu'un ensemble d'ordinaux A est un ordinal si et seulement si $\alpha \notin A$ implique $\forall \beta{\geqslant}\alpha(\beta \notin A)$.

(iii) Déduire de (ii) que, si a est un ensemble transitif, alors $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$ est un ordinal, puis que cet ordinal est $\mathrm{rang}(a)$.

(iv) Donner une démonstration alternative, par induction sur le rang de a, du fait que, si a est transitif, alors on a $\mathrm{rang}(a) = \{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$.

question 14 (2+1+1+2 points)**.** (i) Pour tout ensemble a, on définit récursivement la suite $(\bigcup^n a)_{n\in\omega}$ par $\bigcup^0 a = a$ et $\bigcup^n a = \bigcup(\bigcup^{n-1} a)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\bigcup_{n<\omega}\bigcup^n a$ est le plus petit ensemble transitif incluant a. On notera cet ensemble $\mathrm{Clot}_\in(a)$.

(ii) Montrer la relation $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \mathrm{Clot}_\in(\bigcup a)$. Peut-on avoir $a = \mathrm{Clot}_\in(\bigcup a)$?

(iii) Montrer que, pour tout a, on a $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \bigcup_{x\in a}\mathrm{Clot}_\in(x)$.

(iv) Montrer que, pour tout a, on a $\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a)) = \mathrm{rang}(a)$.

question 15 (1+2+2+2 points)**.** (i) Pour κ cardinal infini, on note H_κ la classe formée par les ensembles a vérifiant $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$. Quels ordinaux appartiennent à H_κ ?

(ii) Montrer que, si a est dans H_κ, alors on a $\mathrm{card}(x) < \kappa$ pour tout x dans $\mathrm{Clot}_\in(\{a\})$.

(iii) Montrer que, si κ est un cardinal régulier, alors la condition de (ii) caractérise les éléments de H_κ.

(iv) Montrer que, si κ est un cardinal singulier, alors la condition de (ii) ne caractérise pas les éléments de H_κ.

question 16 (3+2+2+2 points). (*i*) Déduire de la question 13(*iii*) ou (*iv*) que, pour tout a dans H_κ, on a $\mathrm{rang}(a) < \kappa$, et que H_κ est un ensemble et non une classe propre.

(*ii*) Montrer qu'on a $H_\omega = V_\omega$.

(*iii*) On rappelle que $\beth_\alpha$ est le cardinal défini récursivement par $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ et $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ pour λ limite. Montrer que, pour tout α, on a $\mathrm{card}(V_{\omega+\alpha}) = \beth_\alpha$.

(*iv*) Montrer que, pour $\kappa > \omega$, la relation $H_\kappa = V_\kappa$ équivaut à $\kappa = \beth_\kappa$. Que cela signifie-t-il dans le cas où κ est régulier ?

question 17 (2+3+5+3+3 points). (*i*) Montrer que H_κ est un ensemble transitif, et qu'il est clos par paire et union, c'est-à-dire que, si a, b sont dans H_κ, il en est de même de $\{a, b\}$ et de $\bigcup a$.

(*ii*) On suppose κ régulier. Montrer que a appartient à H_κ si et seulement si a est inclus dans H_κ et vérifie $\mathrm{card}(a) < \kappa$.

(*iii*) On suppose κ régulier et $\kappa > \omega$. Montrer que $(H_\kappa, \in)$ est un modèle de tous les axiomes de ZFC sauf éventuellement l'axiome des parties Par.

(*iv*) Supposant toujours $\kappa > \omega$ et κ régulier, montrer que $(H_\kappa, \in)$ satisfait l'axiome des parties si et seulement si $a \in H_\kappa$ entraîne $\mathfrak{P}(a) \in H_\kappa$, et, de là, si et seulement si κ est inaccessible.

(*v*) En considérant H_{ω_1}, montrer que, si ZFC est consistant, il en est de même de $\mathsf{ZFC}-\mathsf{Par}+ \forall \boldsymbol{x}$ (« $\boldsymbol{x}$ est fini ou dénombrable »).

question 18 (2+3 points). (*i*) On suppose maintenant $\kappa > \omega$ et κ singulier. Montrer que $(H_\kappa, \in)$ est modèle de $\mathsf{ZC}-\mathsf{Par}$, et modèle de Par si on a $\kappa = \beth_\lambda$ avec λ limite.

(*ii*) Montrer que les axiomes de remplacement ne sont pas satisfaits dans la structure $(H_{\beth_\omega}, \in)$.

question 19 (3 points). Montrer que $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clot}_\in(\boldsymbol{x})$ est une formule Δ_1^{ZF}.

question 20 (2+3+4+2 points). (*i*) Dans cette question, on ne suppose plus AC, et on *définit* H_{ω_1} comme la classe des ensembles a tels que tout élément de $\mathrm{Clot}_\in(\{a\})$ soit fini ou dénombrable. Cette définition est-elle équivalente à celle de la question 15 ?

(*ii*) Montrer (sans AC) que, s'il existe une surjection de l'ensemble $\bigcup_{n<\omega} \omega_1^{n+1}$ sur un ordinal α, alors on a $\alpha < \omega_2$.

(*iii*) Légitimer l'existence d'une opération d'énumération $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ associant un ordinal à tout triplet (n, s, a) avec n entier, s suite finie de longueur $n+1$, et a dans H_{ω_1}, de façon à ce que, pour tout α dans ω_1, l'ordinal $\mathbf{F}(0, (\alpha), a)$ est le α-ème élément de l'ensemble $\{\mathrm{rang}(x) ; x \in a\}$, s'il existe, ou est 0 sinon, et, pour $n \geqslant 1$, l'ordinal $\mathbf{F}(n, (\alpha_0, ..., \alpha_n), a)$ est le α_n-ème élément de $\{\mathbf{F}(n-1, (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}), x) ; x \in a\}$ s'il existe, et 0 sinon. En déduire (sans AC) l'inclusion $H_{\omega_1} \subseteq V_{\omega_2}$.

(*iv*) Qu'est-ce qui empêche de remplacer ω_1 par ω dans (*iii*) ?

Exercice 1

On définit l'ensemble des *fonctions élémentaires* comme le plus petit ensemble de fonctions entières (c'est-à-dire de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ pour un certain k) vérifiant les propriétés suivantes :

- les projections $\mathsf{proj}_{p,i}$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires,
- l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de l'égalité de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires,
- si g de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_k$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires, alors leur composée $g \circ (f_1, \ldots, f_k)$ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire,
- si f de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire, alors la somme bornée et le produit borné respectivement définis par

$$(x_1, \ldots, x_p, x) \mapsto \sum_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i) \quad \text{et} \quad (x_1, \ldots, x_p, x) \mapsto \prod_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i)$$

  de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

Question 1 (2 points)**.** Montrer que, pour tout k, les fonctions constantes égales à k (notées $\mathsf{const}_{p,k}$) de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

▷ *On note δ la fonction caractéristique de l'égalité.*
La constante 1 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est obtenue par $x \mapsto \delta(x, x)$.
La constante 0 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est obtenue par $x \mapsto \delta(x, x+1)$.
La constante $k \geq 2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est obtenue par $\mathsf{const}_{1,k} = \mathsf{const}_{1,k-1} + 1$.
La constante k de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est obtenue par $\mathsf{const}_{p,k}(x_1, \ldots, x_p) = \mathsf{const}_{1,k}(\mathsf{proj}_{p,1}(x_1, \ldots, x_p))$. ◁

Question 2 (2 points)**.** Montrer que la fonction exponentielle exp de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\mathsf{exp}(m, n) = m^n$ est élémentaire.

▷ *On obtient $n \mapsto n - 1$ (0 si $n = 0$) par $n \mapsto \sum_{i=0}^{n} \delta(\delta(i, 0), 0)$. Alors exp_0 s'obtient en précomposant $(m, n) \mapsto \prod_{i=0}^{n} \mathsf{proj}_{2,1}(m, i)$ par $(m, n) \mapsto (m, n-1)$, on en déduit exp par $(m, n) \mapsto \delta(n, 0) + \delta(\delta(n, 0), 0) \cdot \mathsf{exp}_0(m, n)$.* ◁

Question 3 (1+1+4+2 points)**.** On définit la fonction T de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par $\mathsf{T}(m, 0) = m$ et $\mathsf{T}(m, n+1) = \mathsf{exp}(2, \mathsf{T}(m, n))$. Pour n dans $\mathbb{N}$, on note T_n la fonction $m \mapsto \mathsf{T}(m, n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(i) Montrer que T est primitive récursive.

(ii) Montrer que $(m, n) \mapsto \mathsf{T}(m, n)$ est strictement croissante en n à m fixé et strictement croissante en m à n fixé.

(iii) On dit qu'une fonction f de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est *dominée* par la fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si, pour tout $(n_1, \ldots, n_p)$ dans $\mathbb{N}^p$, on a $f(n_1, \ldots, n_p) \leq g(\max(n_1, \ldots, n_p))$. Montrer que, pour toute fonction élémentaire f, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que f est dominée par T_n.

(iv) Montrer que T n'est pas élémentaire.

$\triangleright$ *(i)* T *est définie par récurrence primitive à partir de l'identité et de* $(x, y, z) \mapsto \mathsf{exp}(2, z)$.

(ii) $\mathsf{T}(m, n+1) = 2^{\mathsf{T}(m,n)} > \mathsf{T}(m, n)$ *et, par récurrence sur* n, $\mathsf{T}(m+1, 0) = m+1 > m = \mathsf{T}(m, 0)$ *et* $\mathsf{T}(m+1, n+1) = 2^{\mathsf{T}(m+1,n)} > 2^{\mathsf{T}(m,n)} = \mathsf{T}(m, n+1)$.

(iii) On note d'abord que $\mathsf{T}(\mathsf{T}(m, n), n') = \mathsf{T}(m, n+n')$. *On montre le résultat par récurrence sur la définition de la fonction élémentaire* f *: - Les projections sont dominées par* T_0, *l'addition par* T_1, *le produit par* T_2 *et la fonction caractéristique de l'identité par* T_1.

- Si f_i *est dominée par* T_{n_i} *et* g *est dominée par* $\mathsf{T}_{n'}$, *on pose* $n = \max(n_1, \ldots, n_k) + n'$. *On a :*

$$\begin{aligned} h(g_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_p)) &\leq \mathsf{T}_{n'}(\max(g_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_p))) \\ &\leq \mathsf{T}_{n'}(\mathsf{T}_{\max(n_1, \ldots, n_k)}(\max(x_1, \ldots, x_p))) \\ &= \mathsf{T}_n(\max(x_1, \ldots, x_p)) \end{aligned}$$

donc la composée est dominée par T_n.

- Si g *est dominée par* $\mathsf{T}_{n'}$, *soit* $n = \max(2, n'+1)$, *on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i) &\leq \sum_{i=0}^{x} \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, i)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{x} \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \\ &\leq (x+1)\mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \\ &\leq 2^x \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \\ &\leq \mathsf{T}_n(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \end{aligned}$$

donc la somme bornée est dominée par T_n.

- Si g *est dominée par* $\mathsf{T}_{n'}$, *soit* $n = n' + 2$, *on a :*

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_p, i) &\leq \prod_{i=0}^{x} \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, i)) \\ &\leq \prod_{i=0}^{x} \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \\ &\leq \mathsf{T}_{n'}(\max(x_1, \ldots, x_p, x))^{x+1} \\ &\leq \mathsf{T}_n(\max(x_1, \ldots, x_p, x)) \end{aligned}$$

donc le produit borné est dominé par T_n.

(iv) Si T *était élémentaire, la fonction* D *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par* $\mathsf{D}(x) = \mathsf{T}(x, x)$ *le serait aussi et serait donc dominée par une fonction* T_k *mais ceci est impossible car* $\mathsf{D}(k+1) = \mathsf{T}(k+1, k+1) > \mathsf{T}(k+1, k) = \mathsf{T}_k(k+1)$. $\triangleleft$

Exercice 2

Soit Σ la signature $\{0^c, S_1^o, \leq_2^r\}$. Soit $\mathcal{N}$ la structure obtenue à partir de $\mathbb{N}$ en interprétant les symboles de Σ par zéro, successeur et l'ordre des entiers. On note T la théorie de $\mathcal{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_\Sigma$ vraies dans $\mathcal{N}$.

Question 4 (2 points)**.** Montrer que, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T et si m est un élément de $\mathcal{M}$, alors l'ensemble des majorants stricts de m admet un plus petit élément.

▷ *On considère la formule :*

$$\forall x \exists y (x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z (x \leq z \Rightarrow x \neq z \Rightarrow y \leq z))$$

elle exprime l'existence d'un plus petit élément y de l'ensemble des majorants stricts z de x. Elle est vraie dans $\mathcal{N}$: soit x un élément, $y = Sx$ est le plus petit des majorants stricts de x. ◁

Question 5 (2 points)**.** Montrer que l'ordinal $\omega + \omega$ n'est pas un modèle de T.

▷ *La formule :*

$$\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (y \leq x \wedge x \neq y \wedge \forall z (z \leq x \Rightarrow x \neq z \Rightarrow z \leq y)))$$

exprime que pour tout élément non nul x, l'ensemble de ses minorants stricts z admet un plus grand élément y. Elle est vraie dans $\mathcal{N}$ mais fausse dans $\omega + \omega$ à cause de ω. ◁

Question 6 (1 point)**.** Montrer que, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T, alors $\mathcal{N}$ est isomorphe à un sous-ensemble du domaine de $\mathcal{M}$.

▷ *On considère la fonction qui, à $n \in \mathbb{N}$, associe l'interprétation de $S^n 0$ dans $\mathcal{M}$, c'est un isomorphisme de $\mathcal{N}$ dans une partie du domaine de $\mathcal{M}$.* ◁

Question 7 (3 points)**.** Montrer qu'il existe un modèle dénombrable de T non isomorphe à $\mathcal{N}$.

▷ *On enrichit la signature avec un symbole de constante c et on enrichit T en T' en ajoutant les formules F_k : $c \neq S^k 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Tout sous-ensemble fini de T admet $\mathcal{N}$ comme modèle (on interprète c par n strictement plus grand que tous les k des F_k considérés) donc est consistante d'où T' admet un modèle dénombrable (la signature est finie). Comme $\mathcal{N}$ n'est pas un modèle de T', le modèle qu'on a construit ne peut pas être isomorphe à $\mathcal{N}$.* ◁

Question 8 (2 points)**.** Montrer que tous les modèles dénombrables de T qui sont bien ordonnés sont isomorphes à $\mathcal{N}$.

▷ *Supposons qu'on a un modèle $\mathcal{M}$ de T non isomorphe à $\mathcal{N}$, il admet un élément m plus grand que tous les $S^k 0$ (il admet un élément qui n'est pas l'un des $S^k 0$ et T démontre que ces éléments ne sont minorés que par des $S^p 0$). En utilisant la même formule que pour $\omega + \omega$, m admet un plus grand minorant strict m_1 et celui-ci ne peut pas être un $S^k 0$ sinon on aurait $m = S^{k+1} 0$ donc m_1 a un plus grand minorant strict, ... et $\mathcal{M}$ contient une suite infinie décroissante donc n'est pas bien ordonné.* ◁

Question 9 (4 points)**.** Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné dénombrable. Montrer qu'il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T tel que $(E, \preccurlyeq)$ est isomorphe (en tant qu'ensemble ordonné) à un sous-ensemble du domaine de $\mathcal{M}$.

▷ *On a ajoute à la signature un ensemble dénombrable de constantes $(c_e)_{e \in E}$ et on définit $\mathsf{T}' = \mathsf{T} \cup \{c_e \neq c_f \,;\, e \neq f\} \cup \{c_e \leq c_f \,;\, e \preccurlyeq f\}$. Tout sous-ensemble fini de T' est consistant : il est inclus dans l'ensemble obtenu en ajoutant à T un ensemble fini de formules $c_e \leq c_f$, on peut donc enrichir $\mathcal{N}$ en un modèle de cette théorie en interprétant l'ensemble fini de constantes concernées de manière à satisfaire les formules (facile par récurrence sur le nombre de formules par exemple). On en déduit que T' est consistante et admet donc un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ (la signature est dénombrable). L'interprétation des constantes c_e définit une bijection de E dans le domaine de $\mathcal{M}$, de plus si $e \preccurlyeq f$ dans E alors $c_e \leq c_f$ dans $\mathcal{M}$ et réciproquement, si $c_e \leq c_f$ dans $\mathcal{M}$ avec $c_e \neq c_f$, on a soit $e \prec f$ soit $f \prec e$ dans E (car l'ordre est total) mais $f \prec e$ n'est pas possible (sinon $c_f < c_e$ dans $\mathcal{M}$) donc $e \prec f$.* ◁

Exercice 3

On considère une signature contenant au moins un symbole de constante. Un terme est dit *clos* s'il ne contient pas de variable. Soit $\mathsf{F}(x)$ une formule sans quantificateur contenant x comme seule variable libre. On souhaite prouver le *théorème de Herbrand* :

> *Si $\exists x(\mathsf{F}(x))$ est prouvable en logique du premier ordre, alors il existe des termes clos $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_n)$ est prouvable.*

Un ensemble de termes clos U est un *univers de Herbrand* pour F si

- U est non vide,
- si c est un symbole de constante apparaissant dans F, alors c est dans U,
- si f est un symbole d'opération d'arité k apparaissant dans F, et si $t_1, \ldots, t_k$ sont des éléments de U, alors $f(t_1, \ldots, t_k)$ est dans U

Question 10 (1 point)**.** Montrer comment construire un univers de Herbrand U dénombrable (ou fini) pour F.

▷ *Soit U_0 l'ensemble des symboles de constante apparaissant dans F s'il y en a et $\{c\}$ avec c symbole de constante quelconque sinon. On définit U_{n+1} comme l'union de U_n et de l'ensemble des termes clos construits à partir d'un symbole de fonction apparaissant dans F et de termes de U_n. On pose $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, c'est un univers de Herbrand pour F. De plus, tous les U_n sont finis donc U est dénombrable.* ◁

Question 11 (3+3 points)**.** Soit U un univers de Herbrand dénombrable pour F. On suppose que, quelle que soit la suite finie de termes $t_1, \ldots, t_n$ de U, la formule $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_n)$ n'est pas prouvable.

(i) Montrer que la théorie $\mathsf{T} = \{\neg\mathsf{F}(t)\,;\, t \in U\}$ est consistante.

(ii) Construire un modèle de T dont tous les éléments sont interprétations d'éléments de U et montrer qu'il ne satisfait par $\exists x(\mathsf{F}(x))$.

▷ (i) *On utilise le théorème de compacité. Soit T' un sous-ensemble fini de T, $\mathsf{T}' = \{\neg\mathsf{F}(t_1), \ldots, \neg\mathsf{F}(t_k)\}$. Si T' est inconsistante, il existe une preuve de $\perp$ à partir de T' donc par le théorème de la déduction $\vdash \neg\mathsf{F}(t_1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \neg\mathsf{F}(t_k) \Rightarrow \perp$ mais cette formule est équivalente à $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_k)$ qui serait prouvable (contredisant l'hypothèse). On en déduit que T est consistante.*

(ii) *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T (qui existe d'après la Question précédente), et $\mathcal{M}'$ obtenu en restreignant le domaine de $\mathcal{M}$ à l'interprétation des éléments de U. Vérifions que $\mathcal{M}'$ est un modèle de T : $\mathcal{M}'$ est clos par les symboles de fonctions apparaissant dans F et on peut vérifier que l'interprétation d'une formule close sans quantificateur n'utilisant que des termes de U n'est pas modifiée (par récurrence sur la formule). Ce modèle satisfait $\forall x \neg\mathsf{F}(x)$ par construction donc ne satisfait pas $\exists x\mathsf{F}(x)$.* ◁

Question 12 (2 points)**.** Prouver le théorème de Herbrand.

▷ *On montre que l'on peut même choisir les termes dans U puisqu'on vient de montrer la contraposée : si, quelle que soit la suite finie de termes $t_1, \ldots, t_n$ de U, $\mathsf{F}(t_1) \vee \cdots \vee \mathsf{F}(t_n)$ n'est pas prouvable alors il existe un modèle qui ne satisfait pas $\exists x\mathsf{F}(x)$ donc $\exists x\mathsf{F}(x)$ n'est pas prouvable.* ◁

Problème

On étudie les ensembles dits *héréditairement de cardinal* $< \kappa$, montrant en particulier qu'ils forment un modèle de ZFC−Par, où Par désigne l'axiome des parties. Dans toute la suite, la lettre κ désigne toujours un cardinal infini (sans qu'on le répète à chaque fois). On suppose tous les axiomes de ZFC satisfaits.

Question 13 (2+2+2+3 points)**.** On rappelle que le *rang* d'un ensemble a est l'unique ordinal α tel que a est dans $V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, et que $a \in b$ entraîne $\mathrm{rang}(a) < \mathrm{rang}(b)$.

(i) Montrer que, pour tout ensemble a, on a

$$\mathrm{rang}(a) = \inf\{\alpha\,;\, \forall x{\in}a(\mathrm{rang}(x) < \alpha)\}, \tag{3}$$

$$\mathrm{rang}(a) = \sup\{\mathrm{rang}(x) + 1\,;\, x \in a\}. \tag{4}$$

▷ *Dans un sens, on sait que $x \in a$ implique* $\mathrm{rang}(x) < \mathrm{rang}(a)$*. Inversement, supposons qu'on a* $\mathrm{rang}(x) < \alpha$ *pour tout x dans α. Alors on a $x \in V_\alpha$ pour tout x dans α, donc $a \subseteq V_\alpha$, d'où $a \in V_{\alpha+1}$ et* $\mathrm{rang}(a) \leqslant \alpha$.

Comme $\mathrm{rang}(x) < \alpha$ *équivaut à* $\mathrm{rang}(x) + 1 \leqslant \alpha$*, le inf précédent est* $\sup\{\mathrm{rang}(x) + 1)\,;\, x \in a\}$. ◁

(ii) Montrer qu'un ensemble d'ordinaux A est un ordinal si et seulement si $\alpha \notin A$ implique $\forall\beta{\geqslant}\alpha(\beta \notin A)$.

▷ *Supposons que A est un ordinal θ. Alors $\alpha \notin A$ équivaut à $\alpha \geqslant \theta$, et donc, comme $\geqslant$ est un ordre, $\alpha \geqslant \theta$ entraîne $\forall\beta{\geqslant}\alpha(b \geqslant \theta)$, donc $\forall\beta{\geqslant}\alpha(\beta \notin A)$. Inversement, supposons l'implication vérifiée, et soit α le plus petit ordinal non dans A. Par construction, tout élément de α est dans A, donc on a $\alpha \subseteq A$. Inversement, on doit avoir $\forall\beta{\geqslant}\alpha(\beta \notin A)$, d'où $A \subseteq \alpha$, et finalement $A = \alpha$.* ◁

(iii) Déduire de (ii) que, si a est un ensemble transitif, alors $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$ est un ordinal, puis que cet ordinal est $\mathrm{rang}(a)$.

▷ *Soit $A :=$* $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$*. Par construction, A est inclus dans les ordinaux. Supposons que A n'est pas un ordinal. Soit α le plus petit ordinal non dans A, et soit β le plus petit ordinal $> \alpha$ qui est dans A, qui, d'après (ii), existe car on a supposé que A n'est pas un ordinal. Soit b un élément de a de rang β. Tout élément x de b est dans a, donc, par hypothèse, on a* $\mathrm{rang}(x) < \alpha$*, d'où* $\mathrm{rang}(b) = \sup\{\mathrm{rang}(x) + 1\,;\, x \in b\} \leqslant \alpha < \beta$*, contradiction.* ◁

(iv) Donner une démonstration alternative, par induction sur le rang de a, du fait que, si a est transitif, alors on a $\mathrm{rang}(a) = \{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$.

▷ *Par* (i) *on sait qu'on a* $\mathrm{rang}(x) < \mathrm{rang}(a)$*, donc* $\mathrm{rang}(x) \in \mathrm{rang}(a)$ *pour $x \in a$ et, par conséquent, on a toujours* $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\} \subseteq \mathrm{rang}(a)$*. Pour a transitif, on montre l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que tout ordinal plus petit que* $\mathrm{rang}(a)$ *est le rang d'un élément de a, par induction sur le rang de a. Si a est $\varnothing$, le résultat est vrai. Sinon, supposons* $\alpha < \mathrm{rang}(a)$*. Par la relation* (3)*, il existe x dans a vérifiant* $\mathrm{rang}(x) \geqslant \alpha$*. Si on a* $\mathrm{rang}(x) = \alpha$*, on a fini. Sinon, x est transitif et de rang plus petit que a, donc, par hypothèse d'induction, il existe y dans x, donc aussi dans a, vérifiant* $\mathrm{rang}(y) = \alpha$. ◁

Question 14 (2+1+1+2 points)**.** (i) Pour tout ensemble a, on définit récursivement la suite $(\bigcup^n a)_{n\in\omega}$ par $\bigcup^0 a = a$ et $\bigcup^n a = \bigcup(\bigcup^{n-1} a)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\bigcup_{n<\omega} \bigcup^n a$ est le plus petit ensemble transitif incluant a. On notera cet ensemble $\mathrm{Clot}_\in(a)$.

▷ *Tout élément d'un élément de $\bigcup^n a$ est dans $\bigcup^{n+1} a$, donc* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est un ensemble transitif incluant a. Inversement, si b est transitif et inclut a, alors, inductivement, b inclut $\bigcup^n(a)$ pour tout n.* ◁

(*ii*) Montrer la relation $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \mathrm{Clot}_\in(\bigcup a)$. Peut-on avoir $a = \mathrm{Clot}_\in(\bigcup a)$?

▷ *On a* $\mathrm{Clot}_\in(a) = \bigcup_{n\geqslant 0}\bigcup^n a$, *et* $\mathrm{Clot}_\in(\bigcup a) = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcup^n a$, *d'où* $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \mathrm{Clot}_\in(\bigcup a)$.
Tout ordinal est transitif, et, pour λ *ordinal limite, on a* $\lambda = \bigcup\lambda = \mathrm{Clot}_\in(\bigcup\lambda)$. ◁

(*iii*) Montrer que, pour tout a, on a $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \bigcup_{x\in a}\mathrm{Clot}_\in(x)$.

▷ *L'ensemble* $a\cup\bigcup_{x\in a}\mathrm{Clot}_\in(x)$ *inclut* a *et est transitif, donc il inclut* $\mathrm{Clot}_\in(a)$. *Inversement,* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est transitif et inclut* a, *donc il inclut tous les éléments de* a, *donc aussi chacun des ensembles* $\mathrm{Clot}_\in(x)$ *pour* $x \in a$. ◁

(*iv*) Montrer que, pour tout a, on a $\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a)) = \mathrm{rang}(a)$.

▷ *On a* $a \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$, *donc* $\mathrm{rang}(a) \leqslant \mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a))$. *D'un autre côté, on a toujours* $\mathrm{rang}(\bigcup a) \leqslant \mathrm{rang}(a)$, *d'où* $\mathrm{rang}(\bigcup^n a) \leqslant \mathrm{rang}(a)$ *par induction sur* n. *Donc, pourtout* x *dans* $\mathrm{Clot}_\in(a)$, *on a* $\mathrm{rang}(x) < \mathrm{rang}(a)$, *donc, par* (3), *on déduit* $\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a)) \leqslant \mathrm{rang}(a)$. ◁

Question 15 (1+2+2+2 points)**.** (*i*) Pour κ cardinal infini, on note H_κ la classe formée par les ensembles a vérifiant $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$. Quels ordinaux appartiennent à H_κ?

▷ *Tout ordinal* α *est transitif, donc vérifie* $\alpha = \mathrm{Clot}_\in(\alpha)$. *On a donc* $\alpha \in H_\kappa$ *si et seulement si on a* $\mathrm{card}(\alpha) < \kappa$, *soit, puisque* κ *est un cardinal, si et seulement si* $\alpha < \kappa$. ◁

(*ii*) Montrer que, si a est dans H_κ, alors on a $\mathrm{card}(x) < \kappa$ pour tout x dans $\mathrm{Clot}_\in(\{a\})$.

▷ *On montre par induction sur* n *que, pour tout* x *dans* $\bigcup^n\{a\}$, *on a* $x \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$. *Pour* $n = 0$, *la seule possibilité est* $x = a$, *et on a* $a \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$. *Supposons* $n > 0$ *et* $x \in \bigcup^n\{a\}$. *Par définition, il existe* y *dans* $\bigcup^{n-1}\{a\}$ *tel qu'on ait* $x \in y$. *Par hypothèse d'induction, on a* $y \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$. *Alors* $x \in y$ *entraîne* $x \in \mathrm{Clot}_\in(a)$, *donc* $x \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$ *puisque* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est transitif.*
Puisque $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$ *est supposé, on déduit* $\mathrm{card}(x) < \kappa$. ◁

(*iii*) Montrer que, si κ est un cardinal régulier, alors la condition de (*ii*) caractérise les éléments de H_κ.

▷ *Supposons que* κ *est régulier et que tous les éléments de* $\mathrm{Clot}_\in(\{a\})$, *donc en particulier* a *et tous les éléments de* a, *sont de cardinal* $< \kappa$. *Alors on a* $\mathrm{card}(\bigcup a) \leqslant \sum_{b\in a}\mathrm{card}(b) \leqslant \mathrm{card}(a)\cdot\sup_{b\in a}\mathrm{card}(b) < \kappa\cdot\kappa = \kappa$, *puisque,* κ *étant régulier, un sup d'ordinaux plus petits que* κ *indexé par un ordinal plus petit que* κ *est plus petit que* κ. *De même, sous l'hypothèse de* (*ii*), *on obtient inductivement* $\mathrm{card}(\bigcup^n a) < \kappa$ *pour tout* n *et, finalement,* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa\cdot\aleph_0 = \kappa$. ◁

(*iv*) Montrer que, si κ est un cardinal singulier, alors la condition de (*ii*) ne caractérise pas les éléments de H_κ.

▷ *Supposons que* κ *n'est pas régulier: cela signifie qu'il existe une suite croissante de cardinaux* $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\theta}$ *tous* $< \kappa$ *telle qu'on ait* $\kappa = \sup_{\alpha<\theta}\kappa_\alpha$. *Soit* $a := \{\kappa_\alpha\,;\,\alpha<\theta\}$. *On a alors* $\mathrm{card}(a) = \theta < \kappa$, *et, pour tout* α, $\mathrm{card}(\kappa_\alpha) = \kappa_\alpha < \kappa$. *De plus, tout élément d'un élément de* a *est élément d'un des* κ_α, *donc de cardinal* $< \kappa_\alpha$ *et a fortiori* $< \kappa$. *Donc la condition* (*ii*) *est satisfaite par* a. *Pourtant on a* $\mathrm{Clot}_\in(a) \supseteq \bigcup a = \kappa$, *et donc on n'a pas* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$. ◁

Question 16 (3+2+2+2 points)**.** (*i*) Déduire de la Question 13(*iii*) ou (*iv*) que, pour tout a dans H_κ, on a $\mathrm{rang}(a) < \kappa$, et que H_κ est un ensemble et non une classe propre.

▷ *Supposons* $a \in H_\kappa$. *Par 13*(*iii*) *on a* $\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a)) = \{\mathrm{rang}(x)\,;\,x \in \mathrm{Clot}_\in(a)\}$, *et par conséquent* $\mathrm{card}(\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a))) < \kappa$, *donc,* κ *étant un cardinal,* $\mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$, *et* $\mathrm{Clot}_\in(a) \in V_\kappa$. *Comme* *on a* $a \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$*, on a aussi* $a \in V_\kappa$*, d'où* $\mathrm{rang}(a) < \kappa$*. Il en résulte qu'on a* $H_\kappa \subseteq V_\kappa$*, et donc, par séparation, que* H_κ *est un ensemble.* ◁

(ii) Montrer qu'on a $H_\omega = V_\omega$.

▷ *On vient de voir qu'on a* $H_\kappa \subseteq V_\kappa$ *pour tout cardinal infini* κ*, donc en particulier pour* $\kappa = \omega$*. Inversement, une induction sur* n *que chaque ensemble* V_n *est fini. Si* a *est dans* V_ω*, alors il existe* n *tel que* a *est dans* V_n*, donc inclus dans* V_n*, et donc, puisque* V_n *est transitif, on a* $\mathrm{Clot}_\in(a) \subseteq V_n$*, d'où* $\mathrm{Clot}_\in(a) \in V_{n+1}$*, et donc* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est fini, et* a *est dans* H_ω *— on peut aussi utiliser directement la Question 15*(ii)*.* ◁

(iii) On rappelle que $\beth_\alpha$ est le cardinal défini récursivement par $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ et $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ pour λ limite. Montrer que, pour tout α, on a $\mathrm{card}(V_{\omega+\alpha}) = \beth_\alpha$.

▷ *On utilise une induction sur* α*. Pour* $\alpha = 0$*, on a* $\mathrm{card}(V_\omega) = \aleph_0 = \beth_0$*. Pour* $\alpha = \beta+1$*, on a* $\omega+\alpha = (\omega+\beta)+1$*, et l'hypothèse d'induction* $\mathrm{card}(V_{\omega+\beta}) = \beth_\beta$ *entraîne* $\mathrm{card}(V_{\omega+\alpha}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(V_{\omega+\beta})) = 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1}$*. Pour* α *limite, on a* $\omega+\alpha = \sup_{\beta<\alpha}(\omega+\beta)$*, et l'hypothèse d'induction entraînent* $\mathrm{card}(V_{\omega+\alpha}) = \mathrm{card}(\bigcup_{\beta<\alpha} V_{\omega+\beta}) = \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta = \beth_\alpha$*.* ◁

(iv) Montrer que, pour $\kappa > \omega$, la relation $H_\kappa = V_\kappa$ équivaut à $\kappa = \beth_\kappa$. Que cela signifie-t-il dans le cas où κ est régulier?

▷ *A nouveau on a toujours* $H_\kappa \subseteq V_\kappa$*. Supposons* $\kappa = \beth_\kappa$*. Soit* a *quelconque dans* V_κ*. Il existe* $\alpha < \kappa$ *tel que* a *est dans* V_α*. Alors* a *est inclus dans* V_α*, qui est transitif, donc* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est inclus dans* V_α*, et on trouve* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) \leqslant \mathrm{card}(V_\alpha) \leqslant \beth_\alpha < \kappa$ *et* $a \in H_\kappa$*.*

Inversement, supposons $\kappa < \beth_\kappa$*. Comme* κ *est un cardinal infini, c'est un ordinal limite, et on a donc* $\beth_\kappa = \sup_{\alpha<\kappa} \beth_\alpha$*. L'hypothèse* $\kappa < \beth_\kappa$ *et le fait que* $\beth_\kappa$ *est un cardinal, donc un ordinal limite, entraînent qu'il existe* $\alpha < \kappa$ *vérifiant* $\beth_\alpha \geqslant \kappa$*. Soit alors* $a := V_{\omega+\alpha}$*. On a* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) \geqslant \mathrm{card}(a) = \beth_\alpha \geqslant \kappa$*, donc* $a \notin H_\kappa$*, et, d'un autre côté,* $a \in V_{\omega+\alpha+1} \subseteq V_\kappa$*, donc* $a \in V_\kappa$*, et* $H_\kappa \subsetneq V_\kappa$*.*

Pour κ *régulier* $> \omega$*, la condition* $\kappa = \beth_\kappa$ *équivaut au fait que* κ *est inaccessible.* ◁

Question 17 (2+3+5+3+3 points)**.** (i) Montrer que H_κ est un ensemble transitif, et qu'il est clos par paire et union, c'est-à-dire que, si a, b sont dans H_κ, il en est de même de $\{a, b\}$ et de $\bigcup a$.

▷ *Supposons* $a \in b \in H_\kappa$*. Alors on a* $\mathrm{Clot}_\in(b) \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$*, donc* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(b)) < \kappa$*, et* $b \in H_\kappa$*.*

Par 14(ii) *on a* $\mathrm{Clot}_\in(\{a,b\}) = \{a,b\} \cup \mathrm{Clot}_\in(a) \cup \mathrm{Clot}_\in(b)$*, et* $\mathrm{Clot}_\in(\bigcup a) \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$*, donc la clôture est claire.* ◁

(ii) On suppose κ régulier. Montrer que a appartient à H_κ si et seulement si a est inclus dans H_κ et vérifie $\mathrm{card}(a) < \kappa$.

▷ *Supposons* $a \in H_\kappa$ *et* $x \subseteq a$*. Alors on a* $\mathrm{Clot}_\in(x) \subseteq \mathrm{Clot}_\in(a)$*, et alors* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$ *entraîne* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(x)) < \kappa$*. Donc* a *est inclus dans* H_κ*. Par ailleurs, on a* $\mathrm{card}(a) \leqslant \mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$*.*

Inversement, supposons $a \subseteq H_\kappa$ *et* $\mathrm{card}(a) = \lambda < \kappa$*. On a alors* $\mathrm{Clot}_\in(a) = a \cup \bigcup_{x\in a} \mathrm{Clot}_\in(x)$*, donc* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) \leqslant \lambda + \sum_{x\in a} \mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(x))$*. Le sup de* $< \kappa$ *cardinaux chacun* $< \kappa$ *est* $< \kappa$*, et on obtient donc* $\mathrm{card}(\mathrm{Clot}_\in(a)) < \kappa$*, soit* $a \in H_\kappa$*.* ◁

(iii) On suppose κ régulier et $\kappa > \omega$. Montrer que $(H_\kappa, \in)$ est un modèle de tous les axiomes de ZFC sauf éventuellement l'axiome des parties Par.

▷ *On applique le lemme IX.2.2. du cours. Puisque* H_κ *est transitif, les axiomes d'extensionnalité et de fondation sont satisfaits dans* $(H_\kappa, \in)$*. Ensuite, puisque* H_κ *est clos par paire et union, les axiomes de la paire et de l'union sont satisfaits dans* $(H_\kappa, \in)$*. Puisque* H_κ *est clos par sous-ensemble, les axiomes de séparation sont satisfaits dans* $(H_\kappa, \in)$*. Ensuite, les axiomes de remplacement sont satisfaits en vertu de* (ii)*: si* b *inclus dans* H_κ *est l'image d'un ensemble* a *de* H_κ *par une classe fonctionnelle,* *alors, comme a est de cardinal plus petit que κ, il en est de même de b, et b est dans H_κ en vertu de (ii). Pour l'axiome d'infini, ω est dans H_κ.*

Enfin, considérons AC. *Soit a quelconque dans H_κ, et soit R un bon ordre sur a dans* $\mathbf{V}$. *Alors R est inclus dans H_κ, et le cardinal de R est celui de A, donc est strictement plus petit que κ, donc R est dans H_κ. Par hypothèse, $\mathbf{V} \models R$ est un bon ordre sur A. Par semi-absoluité descendante, on déduit $(H_\kappa, \in) \models R$ est un bon ordre sur A. Donc $(H_\kappa, \in)$ satisfait* AC. $\triangleleft$

(iv) Supposant toujours $\kappa > \omega$ et κ régulier, montrer que $(H_\kappa, \in)$ satisfait l'axiome des parties si et seulement si $a \in H_\kappa$ entraîne $\mathfrak{P}(a) \in H_\kappa$, et, de là, si et seulement si κ est inaccessible.

$\triangleright$ *Si $a \in H_\kappa$ entraîne $\mathfrak{P}(a) \in H_\kappa$, alors $(H_\kappa, \in)$ satisfait l'axiome des parties en vertu du lemme IX.2.2. Inversement, supposons que $(H_\kappa, \in)$ satisfait l'axiome des parties, et soit a dans H_κ. Soit b l'ensemble tel que $(H_\kappa, \in)$ satisfait $b = \mathfrak{P}(a)$. Par absoluité, b consiste en toutes les parties de a qui sont dans H_κ, donc en toutes les parties de a, puisque, a étant de cardinal $< \kappa$ et inclus dans H_κ, il en est de même de toute partie de a. On doit donc avoir $b = \mathfrak{P}(a)$, et donc $\mathfrak{P}(a) \in H_\kappa$.*

Si κ est inaccessible, alors, par la Question XX.(v), on a $H_\kappa = V_\kappa$, et on sait que $a \in V_\kappa$ entraîne $\mathfrak{P}(a) \in V_\kappa$. Inversement, si κ n'est pas inaccessible, on sait, puisqu'il est supposé régulier, qu'il existe $\alpha < \kappa$ vérifiant $2^\alpha > \kappa$, et alors on a $\alpha \in H_\kappa$ et $\mathfrak{P}(\alpha) \notin H_\kappa$, donc $(H_\kappa, \in) \not\models$ Par. $\triangleleft$

(v) En considérant H_{ω_1}, montrer que, si ZFC est consistant, il en est de même de ZFC$-$Par$+\ \forall \boldsymbol{x}$ (« $\boldsymbol{x}$ est fini ou dénombrable »).

$\triangleright$ *La structure $(H_{\omega_1}, \in)$ est modèle de* ZFC$-$Par. *De plus, tout élément de H_{ω_1} est fini ou dénombrable, ce qui signifie que, pour tout a dans H_{ω_1}, il existe une surjection f de ω sur a. L'ensemble f est lui-même dénombrable, et il en est de même de sa clôture transitive, qui est $f \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Clot}_\in(\{\{n, f(n)\}, \{n\}\})$, soit $f \cup \bigcup_{n\in\omega}(n, f(n)) \cup \bigcup_{n\in\omega} n \cup \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \cup \bigcup_{n\in\omega}\{n, f(n)\} \cup \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Donc f est dans H_{ω_1}. Par absoluité, f montre dans $(H_{\omega_1}, \in)$ que a est fini ou dénombrable. Donc $(H_{\omega_1}, \in)$ satisfait la formule « tout x est fini ou dénombrable ».* $\triangleleft$

Question 18 (2+3 points). (i) On suppose maintenant $\kappa > \omega$ et κ singulier. Montrer que $(H_\kappa, \in)$ est modèle de ZC$-$Par, et modèle de Par si on a $\kappa = \beth_\lambda$ avec λ limite.

$\triangleright$ *Pour* Z$-$Par, *la démonstration est la même que dans le cas régulier, sauf pour les axiomes de remplacement. Supposons $\kappa = \beth_\lambda$. Alors $a \in H_\kappa$ implique $\mathfrak{P}(a) \in H_\kappa$, et on conclut que* Par *est satisfait comme ci-dessus.* $\triangleleft$

(ii) Montrer que les axiomes de remplacement ne sont pas satisfaits dans la structure $(H_{\beth_\omega}, \in)$.

$\triangleright$ *D'après ce qui précède, $(H_{\beth_\omega}, \in)$ est modèle de* ZC. *Soit $\mathsf{F}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}, \omega)$ la formule $\boldsymbol{n} \in \omega \wedge \boldsymbol{y} = V_{\omega+\boldsymbol{n}}$. L'ensemble ω appartient à $H_{\beth_o}$, et, puisque $(H_{\beth_\omega}, \in)$ satisfait l'axiome des parties et de l'union, et les axiomes de séparation, la suite des ensembles $(V_{\omega+n})_{n\in\omega}$ y est bien définie. Si l'axiome de remplacement associé à la formule* F *était satisfait, il existerait un élément de $H_{\beth_\omega}$ qui serait l'image de la corerspondance fonctionnelle définie par* F, *donc inclurait tous les ensembles $V_{\omega+n}$, donc leur réunion $V_{\omega+\omega}$, laquelle est de cardinal $\beth_\omega$ et n'est donc incluse dans aucun élément de $H_{\beth_\omega}$. Donc l'axiome de remplacement considéré ne peut être satisfait dans $(H_{\beth_\omega}, \in)$.* $\triangleleft$

Question 19 (3 points). Montrer que $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clot}_\in(\boldsymbol{x})$ est une formule Δ_1^{ZF}.

$\triangleright$ *« $\boldsymbol{x}$ est transitif » est Δ_0. Alors $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clot}_\in(\boldsymbol{x})$ s'exprime par*

« $\boldsymbol{y}$ est transitif » $\wedge\ \forall \boldsymbol{z}$(« $\boldsymbol{z}$ est transitif » $\Rightarrow \boldsymbol{z} \supseteq \boldsymbol{y}$), qui est une formule Π_1. D'un autre côté, $\boldsymbol{y} = \mathrm{Clot}_\in(\boldsymbol{x})$ équivaut modulo les axiomes de ZF *à*

$\exists \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f} : \omega \to \boldsymbol{y} \wedge f(0) = \boldsymbol{x} \wedge \forall \boldsymbol{n} \in \omega(\boldsymbol{f}(n+1) = \bigcup \boldsymbol{f}(n) \wedge \boldsymbol{y} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{f}))$, *qui est une formule Σ_1.* $\triangleleft$

Question 20 (2+3+4+2 points). (i) Dans cette Question, on ne suppose plus AC, et on *définit* H_{ω_1} comme la classe des ensembles a tels que tout élément de $\mathrm{Clot}_\in(\{a\})$ soit fini ou dénombrable. Cette définition est-elle équivalente à celle de la Question 15 ?

▷ *A priori non, car, en l'absence de* AC*, on n'est pas assuré qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, et, de là, que* $\aleph_1$ *est un cardinal régulier.* ◁

(ii) Montrer (sans AC) que, s'il existe une surjection de l'ensemble $\bigcup_{n<\omega}\omega_1^{n+1}$ sur un ordinal α, alors on a $\alpha < \omega_2$.

▷ *Il suffit de construire une surjection de* ω_1 *sur l'ensemble* $\bigcup_{n<\omega}\omega_1^{n+1}$*, car alors on en déduit, sous les hypothèses, qu'il existe une surjection de* ω_1 *sur* α*, ce qui est impossible pour* $\alpha \geqslant \omega_2$*. Or, on sait qu'il existe (sans* AC*) une bijection* (f, g) *de* ω_1 *sur* ω_1^2*. Toujours sans* AC*, on obtient une bijection* h_n *de* ω_1 *sur* ω_1^n *en posant* $h_1(\alpha) = \alpha$ *et, récursivement,* $h_n(\alpha) = (f(\alpha), h_{n-1}(g(\alpha)))$*. Ensuite, on obtient une surjection de* ω_1 *sur* $\bigcup_{n<\omega}\omega_1^{n+1}$ *en posant* $h(\alpha) = h_{f(\alpha)}(g(\alpha))$ *si* $f(\alpha) < \omega$ *et* $h(\alpha) = 0$ *si* $f(\alpha) \geqslant \omega$*.* ◁

(iii) Légitimer l'existence d'une opération d'énumération $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ associant un ordinal à tout triplet (n, s, a) avec n entier, s suite finie de longueur $n+1$, et a dans H_{ω_1}, de façon à ce que, pour tout α dans ω_1, l'ordinal $\mathbf{F}(0, (\alpha), a)$ est le α-ème élément de l'ensemble $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$, s'il existe, ou est 0 sinon, et, pour $n \geqslant 1$, l'ordinal $\mathbf{F}(n, (\alpha_0, ..., \alpha_n), a)$ est le α_n-ème élément de $\{\mathbf{F}(n-1, (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}), x)\,;\, x \in a\}$ s'il existe, et 0 sinon. En déduire (sans AC) l'inclusion $H_{\omega_1} \subseteq V_{\omega_2}$.

▷ *L'opération* $\mathbf{F}(0, \bullet, \bullet)$ *est définie récursivement par la condition* $\mathbf{F}(0, (\alpha+1), a) :=$ *le plus petit ordinal* $\beta > \mathbf{F}_0(0, (\alpha), a)$ *tel qu'il existe* x *dans* a *vérifiant* $\mathrm{rang}(x) = \beta$*, et c'est donc une opération ensembliste bien définie. Ensuite, une récursion sur* n *garantit de même l'existence de la suite des opérations* $\mathbf{F}(n, \bullet, \bullet)$*. Alors, par construction,* $\mathbf{F}(0, \bullet, a)$ *définit une surjection de* ω_1 *sur* $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$*, puis, inductivement,* $\mathbf{F}(n, (\bullet, ..., \bullet), a)$ *définit une surjection de* ω_1^{n+1} *sur* $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in \bigcup^n a\}$*.*

Pour a *dans* H_{ω_1}*, on a, par la Question 14,* $\mathrm{rang}(aa) = \mathrm{rang}(\mathrm{Clot}_\in(a))$*, d'où, puisque* $\mathrm{Clot}_\in(a)$ *est transitif,* $\mathrm{rang}(a) = \{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in \bigcup_{n<\omega}\bigcup^n a\}$*. On vient de montrer ci-dessus qu'il existe une surjection de* $\bigcup_{n<\omega}\omega_1^{n+1}$ *sur* $\mathrm{rang}(a)$*, et on conclut qu'on a* $\mathrm{rang}(a) < \omega_2$*, soit* $a \in V_{\omega_2}$*.* ◁

(iv) Qu'est-ce qui empêche de remplacer ω_1 par ω dans (iii) ?

▷ *Par hypothèse, l'ensemble* $\{\mathrm{rang}(x)\,;\, x \in a\}$ *est dénombrable, mais son type d'ordre peut être un ordinal quelconque dans* ω_1*. Pour se ramener à* ω*, il faudrait pouvoir choisir une bijection de* α *sur* ω *pour chaque* α *dans* ω_1*, ce qui n'est pas clair sans* AC*.* ◁