TD de Maths pour l'Info n° 1

Notions préliminaires

On rappelle que la notation $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs (au sens large). Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble constitué des sous-ensembles de E, et pour tout ensemble A inclus dans le domaine d'une fonction f, on note $f(A)$ l'ensemble défini par

$$f(A) \quad = \quad \{f(x) \mid x \in A\}\,.$$

Exercice 1 Soit $f : X \to Y$ une fonction, et A et B deux sous-ensembles de X. Montrez que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Y a-t-il une propriété analogue pour $\cap$?

Exercice 2 Lesquelles parmi les fonctions suivantes sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad l : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad m : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair} \\ 2x+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 Étant donnés deux entiers naturels x et y, on dit que x *divise* y s'il existe un entier z tel que $xz = y$ (où xz désigne le produit de x et de z). Soit « $\mid$ » l'ensemble défini par

$$\mid \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divise } y\}.$$

On écrit $x \mid y$ pour $(x, y) \in \mid$.

1. La relation $\mid$ est-elle un préordre ? un ordre ?
2. Quels sont les majorants de 24 pour $\mid$? ses minorants ?
3. L'ordre $\mid$ est-il total ? complet ?
4. Étant donnée une relation R, le *dual* de R est l'ensemble

   $$\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

   Montrez que le dual d'un (pré)ordre est encore un (pré)ordre.
5. Le dual de $\mid$ est-il complet ?

Exercice 4 Existe-t-il des fonctions monotones non continues ?

Exercice 5 Soit A un ensemble.

1. Montrez que $\subseteq$ est un ordre complet sur $\mathcal{P}(A)$. Quel est son élément minimal ? Est-ce un ordre total ?
2. Soit F la fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$F(X) \quad = \quad \{1, 2, 5\} \ \cup \ X \ \cup \ \{xy \mid x, y \in X\}$$

   où xy représente le produit de x et y. Montrez que F est une fonction continue par rapport à $\subseteq$. Quel est son plus petit point fixe ?
3. Soit un sous-ensemble $X_0 \subseteq \mathbb{N}$ et une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ quelconques. On définit la fonction $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$G(X) \quad = \quad X_0 \ \cup \ X \ \cup \ \{g(x) \mid x \in X\}.$$

   Montrez que G est une fonction continue par rapport à $\subseteq$. Comment pourrait-on appeler son plus petit point fixe ?

Exercice 6 Soit E un ensemble ordonné complet, et f une application de E dans lui-même, et soit $k = \inf\{f^n(\top) | n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $f(k) \leqslant k$.
2. Montrer que pour tout point fixe y de f, $y \leqslant k$.
3. Montrer que le sous-ensemble $\{f^n(\top) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de E.

Exercice 7 Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. On considère n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ et n applications $f_i : A_i \to A_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (les indices s'entendant modulo n). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$F_i \quad = \quad f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i$$

et on suppose qu'il existe une partition de $[\![1, n]\!]$ en deux sous-ensembles non vides I et S tels que, pour tout $i \in I$, F_i est injective, et pour tout $i \in S$, F_i est surjective.

Montrer par récurrence sur n que les applications $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives.