Université Paris 7 - Licence   Année 2004-2005

TD de Maths pour l'Info n° 2

Induction

Exercice 1 On considère le sous ensemble $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par :
(1) $(0,0) \in E$;
(2) si $(x,y) \in E$, alors $(x+1,y) \in E$
(3) si $(x,y) \in E$, alors $(x+1,y+1) \in E$.

Montrer que E est l'ensemble des éléments sous diagonaux de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $y \leq x$.

Exercice 2 – L'énigme de MU (Hofstadter 1986)

On considère le langage $\mathcal{M}$ formé sur l'alphabet à trois lettres `M`, `I` et `U` défini à l'aide de l'axiome et des règles suivantes :

Axiome. $\mathtt{MI} \in \mathcal{M}$;
Règle 1. Si $x\mathtt{I} \in \mathcal{M}$, alors $x\mathtt{IU} \in \mathcal{M}$ (avec $x \in \{\mathtt{M};\mathtt{U};\mathtt{I}\}^*$) ;
Règle 2. Si $\mathtt{M}x \in \mathcal{M}$, alors $\mathtt{M}xx \in \mathcal{M}$ (avec $x \in \{\mathtt{M};\mathtt{U};\mathtt{I}\}^*$) ;
Règle 3. Si $x\mathtt{III}y \in \mathcal{M}$, alors $x\mathtt{U}y \in \mathcal{M}$ (avec $x, y \in \{\mathtt{M};\mathtt{U};\mathtt{I}\}^*$) ;
Règle 4. Si $x\mathtt{UU}y \in \mathcal{M}$, alors $xy \in \mathcal{M}$ (avec $x, y \in \{\mathtt{M};\mathtt{U};\mathtt{I}\}^*$).

Le mot `MU` appartient-il au langage $\mathcal{M}$?

Indication. On pourra d'abord démontrer que pour tout mot $x \in \mathcal{M}$, le nombre d'occurrences de la lettre `I` dans x n'est jamais un multiple de 3.

Exercice 3 – Mots bien parenthésés Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $\mathtt{[} \in \Sigma$ ("crochet ouvrant") et $\mathtt{]} \in \Sigma$ ("crochet fermant"), les autres éléments de Σ étant arbitraires. L'ensemble E des mots *bien parenthésés* est défini inductivement à partir des règles suivantes :

- $\varepsilon \in E$ (ε désigne le mot vide) ;
- si $x \in \Sigma$ est une lettre différente de `[` et de `]`, alors $x \in E$;
- si $u \in E$, alors $\mathtt{[}u\mathtt{]} \in E$;
- si $u, v \in E$, et si u et v sont non nuls, alors $uv \in E$.

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p(\mathtt{[}) = 1, \qquad p(\mathtt{]}) = -1, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si } x \in \Sigma \setminus \{\mathtt{[};\mathtt{]}\}.$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l'alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) \;=\; p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^*$. En particulier, $p(\varepsilon) = 0$.

1. Montrer que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
   (a) $p(u) = 0$.
   (b) pour tout préfixe v de u, on a $p(v) \geq 0$;
2. Montrer réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (a) et (b) de la question précédente, alors u est bien parenthésé.
3. En déduire un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé ou non.

Exercice 4 (tiré de l'examen de septembre 2003)

Soit Φ un ensemble quelconque de constantes. Soient A, B, C, H, J des symboles de fonction d'arité 1, et P, S deux symboles de fonction d'arité 2. On considère l'ensemble inductif $\mathcal{T}$ défini comme le plus petit ensemble de termes tel que :

- $\Phi \subset \mathcal{T}$;
- Si $t \in \mathcal{T}$, alors $A(t)$ et $B(C(t))$ sont aussi dans $\mathcal{T}$.
- Si $t \in \mathcal{T}$ et $u \in \mathcal{T}$, alors $P(t, H(u))$ et $S(J(t), u)$ sont aussi dans $\mathcal{T}$.

1. Choisir un alphabet et donner 4 éléments de $\mathcal{T}$ engendrés chacun par l'application de 5 règles inductives.
2. On considère la fonction $\mathcal{I} : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}(\alpha) & = & 6 \qquad \text{(pour tout } \alpha \in \Phi) \\
\mathcal{I}(A(t)) & = & \mathcal{I}(t) + 3 \\
\mathcal{I}(B(C(t))) & = & 5 \times \mathcal{I}(t) + 4 \\
\mathcal{I}(P(t, H(u))) & = & 5 \times (\mathcal{I}(t) + \mathcal{I}(u)) + 5 \\
\mathcal{I}(S(J(t), u)) & = & \mathcal{I}(t) \times \mathcal{I}(u)
\end{array}$$

   Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}$ on a $\mathcal{I}(t) \geq 6$.
3. Un terme $t \in \mathcal{T}$ peut se transformer en un autre terme $t' \in \mathcal{T}$, ce que l'on notera $t \mapsto t'$, en appliquant une ou plusieurs fois les règles de transformation suivantes :

   (R1) $S(J(t), u) \to A(t)$
   (R2) $P(t, H(u)) \to B(C(t))$
   (R3) $P(t, H(u)) \to u$
   (R4) $S(J(t), A(u)) \to S(J(t), u)$
   (R5) Si $t \to t'$, alors $A(t) \to A(t')$
   (R6) Si $t \to t'$, alors $B(C(t)) \to B(C(t'))$
   (R7) Si $t \to t'$ et $u \to u'$, alors $P(t, H(u)) \to P(t', H(u')$
   (R8) Si $a \to a'$ et $u \to u'$, alors $S(J(t), u) \to S(J(t'), u')$

   (Note : $t \to t'$ est une relation et non une fonction). Ainsi, par exemple :

$$S(J(x), y) \to_{R1} A(x) \qquad \text{et} \qquad P(x, H(y)) \to_{R3} y,$$

   donc

$$S(J(S(J(x), y)), P(x, H(y))) \to_{R8} S(J(A(x)), y)\,.$$

   Montrer que pour tout terme $t \in \mathcal{T}$ tel que $t \to t'$ on a $\mathcal{I}(t) > \mathcal{I}(t')$.