

TD de Maths pour l'Info n° 3

Ordres bien fondés**Exercice 1 – Preuves de terminaison**

1. Montrer la terminaison de la fonction d'Ackerman $\text{ack} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{aligned} \text{ack}(0, y) &= y - 1 && (y \geq 0) \\ \text{ack}(x, 0) &= \text{ack}(x - 1, 1) && (x \geq 1) \\ \text{ack}(x, y) &= \text{ack}(x - 1, \text{ack}(x, y - 1)) && (x, y \geq 1) \end{aligned}$$

Calculer $\text{ack}(1, 1)$, $\text{ack}(2, 2)$, $\text{ack}(3, 3)$ et $\text{ack}(4, 4)$.

2. Montrer la terminaison de la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{aligned} f(0, y) &= 1 && (y \geq 0) \\ f(x, 0) &= 1 && (x \geq 1) \\ f(x, y) &= f(x - 1, x - 1) + 2f(x - 1, y - 1) + f(y - 1, y - 1) && (x, y \geq 1) \end{aligned}$$

Exercice 2 – Ordres lexicographique et multi-ensemble

1. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$(x, y) <_{\text{lex}} (x', y') \quad \Rightarrow \quad f(x, y) < f(x', y')$$

pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathcal{M}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$m <_{\text{mul}} m' \quad \Rightarrow \quad f(m) < f(m')$$

pour tous multi-ensembles $m, m' \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$.

Exercice 3 – Siegfried contre le dragon Fafnir

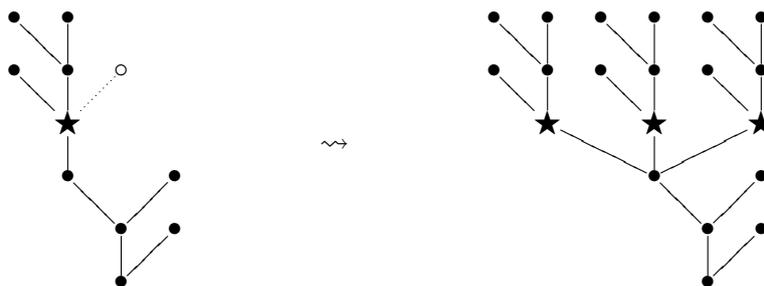
Siegfried se bat contre Fafnir, un dragon à 7 têtes (tout au moins au début). À chaque fois que Siegfried coupe une tête, le dragon décapité se réplique zéro, une ou plusieurs fois, sauf dans le cas où le dragon décapité n'a plus de tête auquel cas il meurt.

Siegfried, qui ne peut frapper qu'une seule tête d'un seul dragon à la fois, a-t-il des chances de l'emporter face aux multiples dragons engendrés au cours du combat ? L'issue du combat dépend-elle de la stratégie adoptée par Siegfried ?

Exercice 4 – Hercule contre l’hydre de Lerne

Pour le second de ses douze travaux, Hercule doit affronter une hydre monstrueuse et excessivement venimeuse qui vit au fond des marais de Lerne, dans le territoire d’Argos.

Cette hydre a une structure arborescente finie, dont l’épée d’Hercule ne peut trancher que les feuilles (une seule à la fois). À chaque coup d’épée, le nœud d’amputation (★) situé juste au-dessous de la feuille (○) qui a disparu et le sous-arbre que ce nœud supporte se répliquent zéro, une ou plusieurs fois dans la structure :



Lorsque la feuille amputée se trouve immédiatement au-dessus de la racine, la réplication ne peut pas avoir lieu sans rompre la connexité de l’hydre, et n’a donc pas lieu :



Hercule saura-t-il terrasser l’Hydre de Lerne ? L’issue du combat dépendra-t-elle des capacités de réplication de l’hydre ? de la stratégie d’Hercule ?