Université Paris 7 - Licence Année 2004-2005

TD de Maths pour l'Info n° 4

Combinatoire

Exercice 1 – Ensembles de fonctions

1. Soient les deux ensembles $A = \{a; b; c\}$ (avec a, b et c deux à deux distincts) et $B = \{x; y\}$ (avec $x \neq y$). Énumérer toutes les fonctions de A dans B. Quel est leur nombre ? Parmi toutes ces fonctions, dénombrer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.
2. Mêmes questions avec $A = \{a; b\}$ et $B = \{x; y; z\}$.
3. Mêmes questions avec $A = B = \{a; b; c\}$.
4. Montrer que si A et B sont deux ensembles finis, alors l'ensemble des fonctions de A dans B a pour cardinal $|B|^{|A|}$.

Exercice 2 Soient quatre ensembles finis A, B, C et D quelconques.

1. Déterminer $|A \cup B \cup C \cup D|$ sachant que :

$$\begin{array}{lll} |A| = 4 & |A \cap B| = 1 & |A \cap B \cap C| = 1 & |A \cap B \cap C \cap D| = 1 \\ |B| = 4 & |A \cap C| = 2 & |A \cap B \cap D| = 1 & \\ |C| = 4 & |A \cap D| = 1 & |A \cap C \cap D| = 1 & \\ |D| = 4 & |B \cap C| = 2 & |B \cap C \cap D| = 2 & \\ & |B \cap D| = 3 & & \\ & |C \cap D| = 2 & & \end{array}$$

2. Même question à partir des données

$$\begin{array}{llll} |A| = 4 & |A \cap B| = 2 & |A \cap B \cap C| = 2 & |A \cap B \cap C \cap D| = 0 \\ |B| = 4 & |A \cap C| = 1 & |A \cap B \cap D| = 2 & \\ |C| = 4 & |A \cap D| = 0 & |A \cap C \cap D| = 2 & \\ |D| = 4 & |B \cap C| = 2 & |B \cap C \cap D| = 1 & \\ & |B \cap D| = 1 & & \\ & |C \cap D| = 0 & & \end{array}$$

   Remarque ? Quelle condition de « cohérence » aurait dû satisfaire le tableau ci-dessus ?

3. Donner des ensembles A, B et C tels que

$$|A| = |B| = |C| = 2, \qquad |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1 \qquad \text{et} \qquad |A \cap B \cap C| = 1\,.$$

Exercice 3

1. Combien de sous-ensembles de [1..10] contiennent au moins un entier impair ?
2. Un groupe est formé de quatre femmes et de six hommes. Chaque femme épouse un homme. Combien y a-t-il de solutions possibles ?
3. Dix personnes se séparent en groupes de deux. De combien de façons peuvent-elles le faire ?
4. Un tiroir contient trois chaussettes bleues, trois chaussettes rouges et quatre chaussettes vertes. On en sort huit, une par une. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 4 Montrer combinatoirement les formules suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\, C_n^i = n\; 2^{n-1}$
3. $\forall n, p, q \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_p^i\, C_q^{n-i} = C_{p+q}^{n}$
4. $\forall n, p \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_{p+i}^{i} = C_{p+n+1}^{n}$

Exercice 5 – Un peu de calcul propositionnel

Lesquelles, parmi les formules suivantes, sont valides ? Contradictoires ? Si une formule n'est pas valide, on donnera une interprétation qui la falsifie.

1.	$p \wedge \neg p$	7.	$p \rightarrow (p \vee q)$	13.	$p \vee q$
2.	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	8.	$p \rightarrow (p \wedge q)$	14.	$p \vee \neg p$
3.	$q \rightarrow (p \wedge \neg p)$	9.	$p \vee (p \rightarrow q)$	15.	$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$
4.	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$	10.	$q \vee (p \rightarrow q)$	16.	$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$
5.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	11.	$p \wedge (p \rightarrow q)$	17.	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
6.	$(p \vee q) \rightarrow q$	12.	$q \wedge (p \rightarrow q)$	18.	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$