Université Paris 7 - Licence Année 2004-2005

TD de Maths pour l'Info n° 5

# Combinatoire (suite)

**Exercice 1 – Arbres binaires**
On rappelle qu'un arbre est dit *binaire* si chacun de ses sommets internes (ou nœuds) a exactement deux fils. On appelle $\Gamma_n$ le nombre d'arbres binaires à $n$ nœuds.

1. Montrer qu'un arbre binaire à $n$ nœuds a $n+1$ feuilles, et donc au total $2n+1$ sommets.
2. Montrer que la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence suivante :
$$\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_k \Gamma_{n-k-1}$$
3. Montrer qu'elle vérifie également la relation :
$$\forall n > 0 \qquad (n+1)\Gamma_n = 2(2n-1)\Gamma_{n-1}$$
4. En déduire que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\, C_{2n}^{n} = \dfrac{1}{2n+1}\, C_{2n+1}^{n}.$

**Exercice 2 – Dérangements**
Un dérangement de $[\![1,n]\!]$ est une permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!]$. On note $D_n$ le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$.

1. Montrer la relation suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, D_k$$
2. Montrer la relation suivante :
$$\forall n > 1 \qquad D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$$
3. En déduire la relation :
$$\forall n > 1 \qquad D_n = n\mathcal{D}_{n-1} + (-1)^n$$
4. En déduire enfin la formule suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
5. Retrouver directement cette formule grâce à la formule de Sylvester.