Université Paris 7 - Licence Année 2004-2005

TD de Maths pour l'Info n° 6

# Révisions

**Exercice 1 [Calcul propositionnel]**
Lesquelles, parmi les formules suivantes, sont valides ? Contradictoires ? Si une formule n'est pas valide, on donnera une interprétation qui la falsifie.

1. $p \wedge \neg p$
2. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
3. $q \to (p \wedge \neg p)$
4. $(p \wedge \neg p) \to q$
5. $(p \wedge q) \to p$
6. $(p \vee q) \to q$
7. $p \to (p \vee q)$
8. $p \to (p \wedge q)$
9. $p \vee (p \to q)$
10. $q \vee (p \to q)$
11. $p \wedge (p \to q)$
12. $q \wedge (p \to q)$
13. $p \vee q$
14. $p \vee \neg p$
15. $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
16. $((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
17. $(\neg p \to p) \to p$
18. $((p \to q) \to p) \to p$

**Exercice 2 [Calcul propositionnel]**

1. Pour quelles valeurs de l'entier $n$ la formule $(n = 1) \to (n = 2)$ est-elle vraie ?
2. Même question pour $((n = 1) \leftrightarrow (n = 2))$.

**Exercice 3 [Calcul propositionnel]**
Que peut-on dire des formules suivantes ? Sont-elles satisfaisables ? Valides ? Insatisfaisables ? Utiliser pour chacune les tables de vérité.

1. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
2. $((p \to q) \wedge (s \to m)) \to ((p \vee s) \to q)$
3. $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$
4. $(p \wedge \neg p) \to q$

**Exercice 4 [Récurrence]**

1. Donner toutes les sous-formules de la formule : $\neg(p \vee (q \wedge r)) \to (p \wedge q)$
2. Soit $F$ une formule propositionnelle à $n$ connecteurs. Quel est le nombre maximum de sous-formules de $F$ ? Le démontrer par récurrence sur $n$.

**Exercice 5 [Combinatoire]**
Donner une preuve (interprétation) combinatoire des égalités suivantes :

1. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \qquad (n \geq 0,\ 0 \leq k < n)$
2. $C_{p+q}^n = \sum_{i=0}^{n} C_p^i C_q^{n-i} \qquad (p, q \geq 0,\ 0 \leq n \leq p+q)$

**Exercice 6 [Combinatoire – Examen de janvier 2004]**
Considérons l'ensemble $B_n$ des fonctions booléennes à $n$ variables, ainsi que les sous-ensembles de $B_n$ suivants :

$$\begin{array}{rcl} V_n^k & = & \{f \in B_n \mid f \text{ a } \textbf{exactement } k \text{ lignes à } \mathbf{V} \text{ dans sa table de vérité}\} \\ W_n^k & = & \{f \in B_n \mid f \text{ a } \textbf{au plus } k \text{ lignes à } \mathbf{V} \text{ dans sa table de vérité}\} \\ Z_n^k & = & \{f \in B_n \mid f \text{ a } \textbf{au moins } k \text{ lignes à } \mathbf{V} \text{ dans sa table de vérité}\} \end{array}$$

Répondez, en justifiant vos réponses, aux questions qui suivent :

1. Quelle est la cardinalité $b_n$ de $B_n$ ?
2. Quelle est la cardinalité $v_n^k$ de $V_n^k$ ?
   Vérifiez que votre formule est valide sur le cas $n = 2$, $k = 2$.
3. Quelle est la cardinalité $w_n^k$ de l'ensemble $W_n^k$ ?
4. Quelle est la cardinalité $z_n^k$ de l'ensemble $Z_n^k$ ?
5. Montrez que $w_n^k$ a la propriété suivante :
   $$w_n^k = w_n^{k-1} + C_{2n}^{2n-k}$$
6. Montrez que, pous les formules que vous avez trouvé, on a bien :
   $$b_n = w_n^k + w_n^k - v_n^k$$

**Exercice 7 [Induction]**
Étant donné un ensemble $A$, on note $\text{List}_A$ l'ensemble des listes d'élément de $A$. On désigne par $[]$ la liste vide, et l'opération de *consing* est notée $a :: l$ (avec $a \in A$ et $l \in \text{List}_A$).
On considère la fonction append : $\text{List}_A \times \text{List}_A \to \text{List}_A$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \text{append}([], l_2) & = & l_2 \\ \text{append}(a :: l_1, l_2) & = & a :: \text{append}(l_1, l_2) \end{array}$$

1. Montrer que la fonction append est bien définie.
2. Montrez que la fonction append est associative :
   $$\text{append}(\text{append}(l_1, l_2), l_3) = \text{append}(l_1, \text{append}(l_2, l_3)) \qquad (l_1, l_2, l_3 \in \text{List}_A)$$

**Exercice 8 [Combinatoire – Examen de septembre 2004]**

1. Écrivons $S_n^k$ pour les sommes $\sum_{i=0}^{k} C_n^i$ des coefficients binomiaux.
   Montrez que $S_n^k$ satisfait les égalités suivantes :
   $$S_1^0 = 1 \qquad S_1^1 = 2 \qquad S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + S_{n-1}^k$$
2. Considérons l'ensemble $\mathbb{B}$ des fonctions booléennes ternaires.
   (a) Indiquez la cardinalité des sous-ensembles suivants de $\mathbb{B}$, en justifiant le résultat (une réponse sans justification ne sera pas prise en compte).
      i. $\mathbb{B}$
      ii. $B_i^k = \{f \in \mathbb{B} \mid$ la table de vérité de $f$ contient exactement $n$ valeurs $\mathbf{V}$, avec $i \leq n \leq k\}$
      iii. $B_2^6 \cap B_4^7$
   (b) Calculez maintenant la cardinalité de $B_2^6 \cup B_4^7 \cup B_5^8$ *en utilisant la formule de Sylvester* (toute autre solution ne sera pas prise en compte).