

## TD de Maths pour l'Info n° 7

**Probabilités**

- Exercice 1**
1. Une urne contient une boule bleue et une boule rouge. On tire, avec remise, 3 boules (ce qui équivaut à tirer à pile ou face trois fois).
    - Calculez la probabilité de tirer une bleue puis une rouge puis une bleue.
    - Calculez la probabilité pour qu'il y ait une boule bleue et deux rouges.
    - Généraliser la formule précédente en calculant la probabilité pour qu'il y ait  $n_r$  boules rouges et  $n_b$  boules bleues lorsque l'on tire  $n$  boules ( $n_r + n_b = n$ ).
  2. Une urne contient  $r$  boules rouges et  $b$  boules bleues. On tire, avec remise,  $n$  boules. Calculez la probabilité pour qu'il y ait  $n_r$  boules rouges et  $n_b$  boules bleues ( $n_r + n_b = n$ ).
  3. Même question *sans* remise (avec  $n \leq r + b$ ).

**Exercice 2** On considère la transmission d'un message « oui » ou « non » dans une population. Chaque personne transmet le message qu'elle a reçu avec probabilité  $p$ , et le message contraire avec probabilité  $q = 1 - p$ . On note  $X_n$  le  $n^{\text{e}}$  message transmis, et on suppose que le message initial  $X_1$  est « oui ». Calculer  $p_n = \mathbf{P}(X_n = \text{oui})$ .

**Exercice 3** On suppose que l'on a autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille à la naissance. Votre voisin vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?
4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche. Sachant que dans les familles avec un garçon et une fille exactement, la fille décroche avec une probabilité  $p$ , quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

**Exercice 4** Soit  $U_1$  et  $U_2$  deux urnes, l'urne  $U_i$  contenant  $r_i$  boules rouges et  $b_i$  boules blanches. On choisit l'une des urnes au hasard de manière équiprobable, puis on y tire une boule. Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $U_1$  ?

**Exercice 5** Soit  $\Omega_2$  l'ensemble des familles de deux enfants, et  $\Omega_3$  celui des familles de trois enfants. On considère les événements  $A =$  « il y a au plus une fille dans la fratrie » et  $B =$  « il y a au moins un garçon et une fille ». Vérifier que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants dans l'espace  $\Omega_3$  mais pas dans  $\Omega_2$ .

**Exercice 6** Donner un exemple de trois événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  deux à deux indépendants tels que  $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ .