

---

**TD08 - Fonction constructible pour le temps et pour l'espace.**


---

**Exercice 1.***Exemple : fonction constructible pour l'espace*

Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en espace :

- (a) si  $p$  est un entier, la fonction constante égale à  $p$ .
- (b)  $f : n \mapsto n$ .
- (c)  $f : n \mapsto n/2$ .
- (d)  $f : n \mapsto n^2$ .
- (e)  $f : n \mapsto 2^n$ .
- (f)  $f : n \mapsto \sqrt{n}$ .
- (g)  $f : n \mapsto \log_2(n)$ .

si  $f$  et  $g$  sont constructibles en espace :

- (h)  $f - 1$ .
- (i)  $f + g$ .
- (j)  $fg$ .
- (k)  $2^f$ .

**Exercice 2.***Exemple : fonction constructible en temps*

Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en temps :

- (a) si  $p$  est un entier, la fonction constante égale à  $p$ .
- (b)  $f : n \mapsto n$ .
- (c) si  $p$  est un entier,  $f : n \mapsto n^p$ .
- (d)  $f : n \mapsto 2^n$ .

si  $f$  et  $g$  sont constructibles en espace :

- (e)  $f + g$ .
- (f)  $fg$ .

**Exercice 3.***Constructible pour le temps  $\Rightarrow$  pour l'espace*Soit  $f$  une fonction récursive partout définie de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Si  $f$  est constructible pour le temps. Montrer que cette fonction est constructible pour l'espace.**Exercice 4.***Autre définition pour l'espace*Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $f(n) \geq \log_2(n)$  pour  $n$  assez grand. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $f$  est calculable par une machine de Turing en espace  $O(f(n))$ .
- b)  $f$  est constructible pour l'espace.

**Exercice 5.***Autre Définition pour le temps*

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $f(n) \geq n$  et telle qu'il existe un nombre réel positif  $\epsilon$  pour lequel  $f(n) \leq (1 + \epsilon)n$  presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $f$  est calculable par une machine de Turing en temps  $O(f(n))$ .
- b)  $f$  est constructible pour le temps.