Titre

Sémantique des Jeux

Olivier Laurent + Paul-André Melliès.

DEA SPP

www.pps.jussieu.fr/∼mellies/dea2003.html

Cours I

Modèle ensembliste du lambda-calcul ;
Catégories cartésiennes fermées ;
Exemples de modèles statiques et dynamiques.

Points pratiques

— Examen début avril.

— Les cours Bucciarelli-Longo et DiCosmo-Kesner en synchronie.

— Projets de stage disponibles sur la page web du cours

www.pps.jussieu.fr/∼mellies/dea2003.html

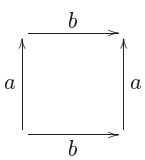
Syntaxe ou sémantique?

Tenir le calcul par les deux bouts:

— les manipulations syntaxiques,

— la signification qu'on prête à ces manipulations.

De la même manière qu'en topologie algébrique, on construit des complexes simpliciaux (syntaxe) et qu'on en établit le genre (sémantique).



$\Longrightarrow$ un tore

... mais cette fois sur le calcul et le raisonnement !

— Comprendre la syntaxe $\Rightarrow$ une sémantique,

— Formaliser la sémantique $\Rightarrow$ une syntaxe (catégorique).

Dès lors, les frontières sont brouillées...

La logique intuitionniste en 1985

Une constellation de points de vue:

Catégories
cartésiennes closes
(algèbre)

λ-calcul et
déduction naturelle
(géométrie)

Modèles
de Scott
(statique)

Elimination des coupures

Calcul
des séquents
(syntaxe)

Concrete
data structures
(dynamique)

Machine de Krivine
et CAM
(compilation)

La secrète noirceur du lait: décomposition linéaire du λ-calcul (1)

Nombres de Church

$$0 = (\lambda f.\lambda x.x) \qquad 1 = (\lambda f.\lambda x.fx) \qquad 2 = (\lambda f.\lambda x.f(f(x)))$$

Là, un série de calculs “atomiques” $\longrightarrow$ qui ne font que déplacer et réorganiser les termes

$$1PQ \longrightarrow (\lambda x.Px)Q \longrightarrow PQ$$

Ici, une série de calculs où chaque étape $\xrightarrow{*}$ est en fait une “molécule” de manipulations atomiques

$$0PQ \xrightarrow{*} (\lambda x.x)Q \longrightarrow Q \qquad 2PQ \xrightarrow{*} (\lambda x.P(Px))Q \longrightarrow P(PQ)$$

— Dans le premier cas, $\xrightarrow{*}$ efface le λ-terme P.

— Dans le deuxième cas, $\xrightarrow{*}$ duplique le λ-terme P.

Pourtant, dans les deux cas, $\xrightarrow{*}$ ne représente qu’une étape de β-reduction dans le λ-calcul.

Décomposition linéaire du λ-calcul (2)

Objectif: Décomposer les mécanismes de duplication et d'effacement du λ-calcul.

Pour quoi faire?

> Extraire les atomes syntaxiques des molécules existantes, et en dresser un tableau de Mendeleiev.

Ambitieux, mais jusqu'ici, ça marche!

La décomposition de LJ (et LK) en LL

en LJ: $A \Rightarrow B \;=\; !A \multimap B$ en LK: $A \Rightarrow B \;=\; !?A \multimap ?B$

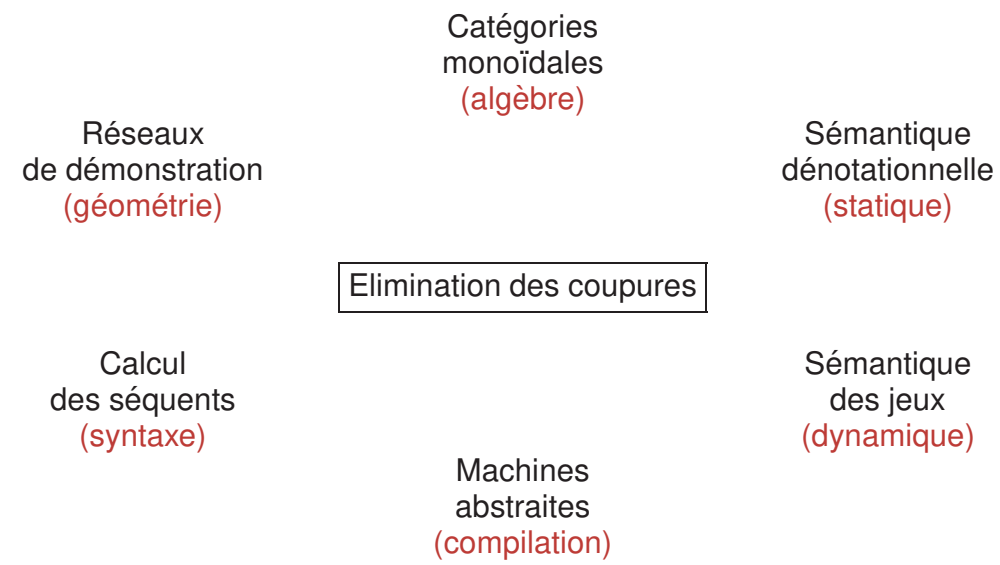
1. réévalue et simplifie les modèles dénotationnels du λ-calcul, à la fois statiques (e.g. dI-domaines vu comme espaces de cohérence) et dynamiques (e.g. CDSs vu comme sémantique des jeux),

2. explique certains mécanismes d'optimalité (Lévy) en λ-calcul, de partage de ressource, ouvre la voie à des typages de complexité polynomiale, ...

3. surtout, en ce qui nous concerne, la décomposition dévoile une symétrie brisée en LJ et LK, en faisant apparaitre la dualité fondamentale, et cachée jusque là, entre Joueur (P) et Opposant (O).

Logique linéaire

La logique linéaire offre une relecture globale de LJ et de LK.



Depuis 15 ans, des résultats étonnants sur chacun des pôles, et aux interfaces.

Bibliographie (pour les cours 1 2 et 3)

J-Y. Girard. Advances in LL, Cambridge University Press, 1995.
Linear Logic: its syntax and its semantics.
Plus qu'une introduction à la logique linéaire.

S. Abramsky and G. McCusker. Computational Logic, Springer 1999.
Game Semantics.
Présentation pédagogique des différentes classes de stratégie
sur les jeux à arène, et les théorèmes de "full abstraction".

P-A. Melliès. Manuscrit.
Categorical models of linear logic revisited
http://www.pps.jussieu.fr/∼mellies/papers.html/
Expose les différentes définitions catégoriques de l'exponentielle.

S. MacLane. Springer Verlag, 1971.
Categories for the working mathematician.
Surtout pour les chapitres IV, VI et VII.

Plan de la séance

1— le modèle ensembliste du λ-calcul simplement typé,

2— la structure catégorique de Ens: catégories et foncteurs,

3— la structure catégorique de Ens: ccc,

4— interprétation du λ-calcul simplement typé dans une ccc,

5— exemples de cccs,

6— linéarisation de modèles.

Profil des séances suivantes

23– Jeux à arènes, stratégies innocentes,

4— Catégories symétriques monoïdales closes,

5— Exponentielles et construction de Kleisli,

67– $\lambda\mu$-calcul = PCF + Contrôle = Innocence.
. Dualité appel par nom, appel par valeur,

8— PCF = Innocence + Parenthésage,

9— ALGOL = Visibilité,

10– Rétraction entre exponentielles.

I. L'interprétation ensembliste du λ-calcul

Le λ-calcul

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B$$

Variable
$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Lambda
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \longrightarrow B}$$

Application
$$\frac{\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash N : A}{\Gamma, \Delta \vdash MN : B}$$

Affaiblissement
$$\frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma, x : A \vdash M : B}$$

Contraction
$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash M : B}{\Gamma, z : A \vdash M[x, y := z] : B}$$

Permutation
$$\frac{\Gamma, x : A_1, y : A_2, \Delta \vdash M : B}{\Gamma, y : A_2, x : A_1, \Delta \vdash M : B}$$

Interprétation ensembliste

On associe un ensemble X_α à chaque type atomique α.
Ensuite, on étend l'interprétation à tous les types:

$$[\![\alpha]\!] = X_\alpha \qquad [\![A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \;=\; \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ens}}([\![A]\!], [\![B]\!])$$

Un séquent	$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \;\vdash\; M : B$
est interprété comme une fonction	$[\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$

Propriété remarquable: "soundness" pour les règles β et η

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \;=\; [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

II. La structure catégorique des ensembles

A. Catégories et foncteurs

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'une classe d'objets,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de morphismes pour tout couple d'objets (A, B),

— d'une loi de composition $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme identité $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D), \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B), \qquad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Exemple 1. La catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles et fonctions.

Exemple 2. Tout ensemble ordonné $(X, \preceq)$,

Exemple 3. La catégorie des jeux à arènes, et stratégies séquentielles.

Catégorie duale

Prendre une catégorie $\mathcal{C}$, et changer la direction de toutes les flèches: voilà définie la catégorie duale $\mathcal{C}^{op}$.

Catégorie produit

Le produit de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

— dont les objets sont les couples (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

— dont les morphismes $(A, B) \longrightarrow (A', B')$ sont les couples de morphismes (f, g)

$$f : A \longrightarrow A' \qquad\qquad g : B \longrightarrow B'$$

avec composition et identités définis de la manière attendue:

$$(A, B) \xrightarrow{id_{(A,B)}} (A, B) \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(id_A, id_B)} (A, B)$$

$$(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \xrightarrow{(f',g')} (A'', B'') \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(f' \circ f, g' \circ g)} (A'', B'')$$

Foncteur

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée:

— d'un objet FA de $\mathcal{D}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \qquad = \qquad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \qquad = \qquad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Un isomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme tel qu'il existe un morphisme $g : B \longrightarrow A$ tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$.

exo 1. Montrer qu'un foncteur préserve les isomorphismes.

Bifoncteur

Un bifoncteur F de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vers une catégorie $\mathcal{E}$ est la donnée:

— d'un foncteur $F(A,-)$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'un foncteur $F(-,B)$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ pour tout objet B de $\mathcal{D}$,

tels que pour tous morphismes $f : A \longrightarrow A'$ de $\mathcal{C}$ et $g : B \longrightarrow B'$ de $\mathcal{D}$, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F(A,B) & \xrightarrow{F(A,g)} & F(A,B') \\ {\scriptstyle F(f,B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f,B')} \\ F(A',B) & \xrightarrow{F(A',g)} & F(A',B') \end{array} \tag{1}$$

commute.

Notation: $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$,

Remarque. Le diagramme (1) permet d'écrire $F(f,g) : A \times B \longrightarrow A' \times B'$.

exo 2. Montrer que bifoncteur de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ et foncteur de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ sont deux notions équivalentes. Ce qui justifie la notation.

III. La structure catégorique des ensembles

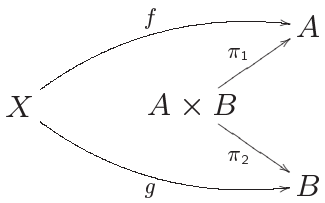
B. Catégories cartésiennes closes

Produits

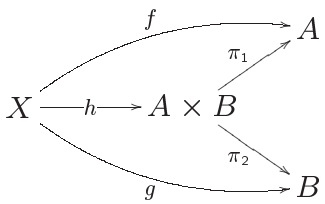
Le produit de deux objets A et B dans une catégorie $\mathcal{C}$, est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme



il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme



exo 3. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près. (Cela est vrai plus généralement de toute définition universelle: limite, colimite, etc...)

Exemple 1. Le produit cartésien dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,

Exemple 2. La borne inférieure dans un ensemble ordonné $(X, \preceq)$,

Exemple 3. Le produit $A \times B$ de jeux, défini dans la catégorie des stratégies innocentes (par exemple).

Objet terminal

Un objet 1 est terminal dans la catégorie $\mathcal{C}$ lorsque $\mathbf{Hom}(A, 1)$ est singleton, pour tout objet A.

On peut considérer que 1 est le produit “vide”de $\mathcal{C}$.

Exemple 1. Le singleton $\{*\}$ dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,

Exemple 2. Le maximum dans un ensemble ordonné $(X, \preceq)$

Exemple 3. Le jeu $\bot$ avec $M_\bot = \varnothing$ dans les jeux à arène.

exo 4. Montrer que dans une catégorie qui contient un objet terminal 1, tout objet est produit de 1 et de lui-même.

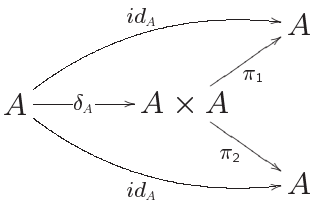
Catégorie cartésienne

Une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée d'un produit $A \times B$ pour tout couple d'objets, et d'un objet terminal 1.

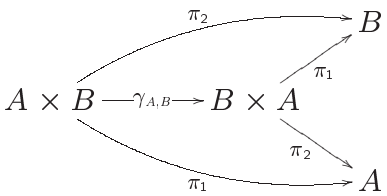
Dans toute catégorie cartésienne,

— effacement $\epsilon_A : A \longrightarrow 1$,

— diagonale $\delta_A : A \longrightarrow A \times A$ obtenue par



— symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \longrightarrow B \times A$ obtenue par



exo 5. montrer que $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ unique.

Exponentiation cartésienne

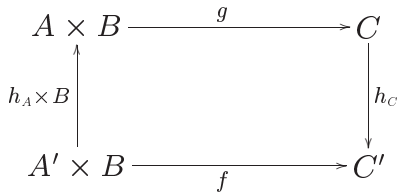
Soit B un objet dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$.

On appelle exponentiation cartésienne de B le couple formé par un foncteur $(B \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et une famille $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ de bijections indexée par des objets A, C de $\mathcal{C}$:

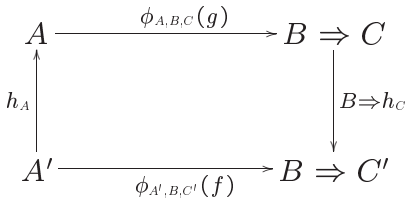
$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, B \Rightarrow C)$$

naturelle en A et C.

Naturelle en A et C signifie que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ transforme tout diagramme commutatif



en un diagramme commutatif:



Ccc

Une catégorie cartésienne close (ccc) est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ munie d'une exponentiation cartésienne

$$\frac{A \times B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \Rightarrow C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{2}$$

pour tout objet B.

Théorème du paramètre

Nous avons vu que le produit $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.
De même

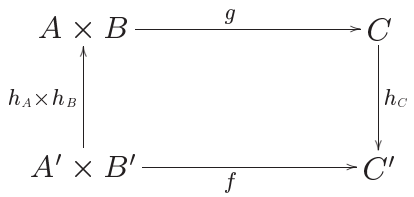
Théorème du paramètre [MacLane]

La famille d'exponentiations $(B \Rightarrow -)_B$ définit un unique bifoncteur

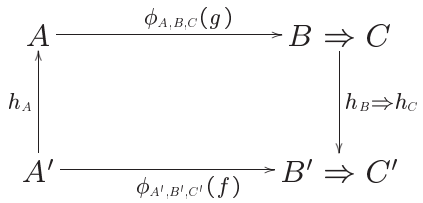
$$(- \Rightarrow -) \ : \ \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que les bijections $\phi_{A,B,C}$ soient naturelles en A, B et C.

Naturelle en A, B et C signifie que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ transforme tout diagramme commutatif



en un diagramme commutatif:



IV. Interprétation du λ-calcul dans une CCC

Interprétation du λ-calcul

Variable: $A \xrightarrow{id_A} A$

Lambda: $A \times B \xrightarrow{f} C$ devient $A \xrightarrow{\phi_{A,B,C}(f)} B \Rightarrow C$

Application: $A \xrightarrow{f} B \Rightarrow C$ et $B' \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$A \times B' \xrightarrow{f \times g} (B \Rightarrow C) \times B \xrightarrow{eval_{B,C}} C$$

où

$$eval_{A,B} = \phi^{-1}_{A \Rightarrow B, A, B}(id_{A \Rightarrow B}) : (A \Rightarrow B) \times A \longrightarrow B$$

Contraction: $A \times A \times B \xrightarrow{f} C$ devient $A \times B \xrightarrow{\delta_A \times B} A \times A \times B \xrightarrow{f} C$

Affaiblissement: $B \xrightarrow{f} C$ devient $A \times B \xrightarrow{\epsilon_A \times B} 1 \times B \xrightarrow{\sim} B \xrightarrow{f} C$

Permutation: $A \times A_1 \times A_2 \times A' \xrightarrow{f} B$ devient

$$A \times A_2 \times A_1 \times A' \xrightarrow{A \times \gamma_{A_2, A_1} \times A'} A \times A_1 \times A_2 \times A' \xrightarrow{f} B$$

Théorème de validité

Théorème (“soundness”):

L’interprétation du λ-calcul simplement typée est correcte dans toute ccc.

Autrement dit, si $\mathcal{C}$ est une ccc et $[\![-]\!]$ est son crochet d’interprétation,

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \;=\; [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

exo 6. Démontrer le théorème ci-dessus. Conseil: utiliser pour cela le théorème du paramètre de Mac Lane.

V. Exemples de CCC

Pourquoi introduire les cccs?

Disons que pour les ensembles et fonctions, c'était assez facile.

Mais, il est parfois difficile de savoir si une interprétation donne véritablement un modèle.

Exemples:

— domaines de Scott et fonctions continues,

— domaines de Berry et fonctions stables,

— structures de données concrètes, et algorithmes séquentiels (Berry+Curien),

— jeux d'arènes et stratégies séquentielles.

Aussi: permet ensuite d'analyser la logique par la voie catégorique!

Catégories symétriques monoïdales closes, comonades, construction de Kleisli...

VI. Linéarisation

Linéarisation

A l'origine de la logique linéaire (1986)...

La décomposition linéaire du modèle des fonctions stables de Berry.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérées:

dI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables Bucciarelli-Ehrhard 1991	$\Rightarrow$	Espace d'hypercohérence Ehrhard 1993
Bidomaines Berry 1979	$\Rightarrow$	Bistructures Curien-Plotkin-Winskel 1996
Structures de données concrètes Berry-Curien 1985	$\Rightarrow$	Jeux Lamarche 1992