Titre

Sémantique des Jeux

Olivier Laurent + Paul-André Melliès.

DEA SPP

www.pps.jussieu.fr/~mellies/dea2003.html

Cours 4 et 5

Jeux linéaires;
Catégories symétriques monoidales closes ;
Espaces de cohérence;
Dualité et catégories $*$-autonomes

Rappels de la première séance: la catégorie Ens comme ccc

— Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ où sont spécifiés:

- pour chaque couple d'objets A, B, un produit cartésien $A \times B$ et ses projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$,
- un objet terminal $\mathbf{1}$.

— Une catégorie cartésienne close est une catégorie cartésienne où sont spécifiés, pour chaque objet B,

- un foncteur $(B \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ indexée par des objets A, C de $\mathcal{C}$,

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, B \Rightarrow C)$$

naturelle en A et C.

— Théorème du paramètre: la famille $(- \Rightarrow B)_B$ définit un bifoncteur

$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

d'une unique manière telle que la famille $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

I. Jeux linéaires

Jeux linéaires

Un jeu linéaire A est un triplet

$$A = (M_A, \lambda_A, P_A)$$

où

— M_A est un ensemble dont les éléments sont appelés coups de A,

— $\lambda_A : M_A \longrightarrow \{J, O\}$ est une fonction de polarité sur les coups,

— P_A est un ensemble non vide et clos par préfixe de mots sur l'alphabet M_A.

On appelle partie du jeu A tout mot $s \in P_A$.

Remarque: tout jeu linéaire A admet au moins une partie: la partie vide, notée ϵ.

Stratégies

Une stratégie σ est un ensemble de parties du jeu A, tel que

— toute partie $s \in \sigma$ est vide ou $\begin{cases} \text{commence par un coup Opposant,} \\ \text{termine par un coup Joueur,} \end{cases}$

— alternation toute partie $s \in \sigma$ est alternée,

— clos par préfixe pair si $s \cdot a \cdot b \in \sigma$, alors $s \in \sigma$,

— déterminisme si $s \cdot a \cdot b \in \sigma$ et $s \cdot a \cdot c \in \sigma$, alors $b = c$.

Remarque:
toute partie $s = m_1; ...; m_k$ d'une stratégie σ est donc de longueur paire, avec:

$$\lambda_A(m_i) = O \text{ si } i \text{ est impair} \qquad \lambda_A(m_i) = J \text{ si } i \text{ est pair}$$

Dualité

Le jeu linéaire $A^{\perp}$ est défini en renversant le rôle de O et J:

— $M_{A^{\perp}} = M_A$

— $\lambda_{A^{\perp}}(m) = \begin{cases} O & \text{lorsque } \lambda_A(m) = J, \\ J & \text{lorsque } \lambda_A(m) = O. \end{cases}$

— $P_{A^{\perp}} = P_A$.

Produit tensoriel

Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux jeux linéaires A et B est défini par entrelacement des parties de A et des parties de B:

— $M_{A\otimes B} = M_A + M_B$

— $\lambda_{A\otimes B}(m) = \begin{cases} \lambda_A(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } A, \\ \lambda_B(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } B, \end{cases}$

— une partie $s \in P_{A\otimes B}$ est un mot sur l'alphabet $M_{A\otimes B}$ qui se projette en des parties $s \upharpoonright A \in P_A$ et $s \upharpoonright B \in P_B$.

La définition de projection est habituelle:

— $\epsilon \upharpoonright A = \epsilon$,

— $(s;m) \upharpoonright A = \begin{cases} (s \upharpoonright A);m & \text{si } m \text{ est un coup de } A, \\ s \upharpoonright A & \text{si } m \text{ est un coup de } B. \end{cases}$

exo 1. montrer que le jeu 1 d'ensemble de coup $M_1 = \emptyset$ vérifie $A \otimes 1 = A = 1 \otimes A$ pour tout jeu linéaire A.

Produit par ⅋ et implication linéaire $\multimap$

Par dualité ou "lois de De Morgan", on définit:

$$A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$$

Puis la flèche linéaire $\multimap$ entre jeux linéaire:

$$A \multimap B \quad = \quad A^\perp \parr B \quad = \quad (A \otimes B^\perp)^\perp$$

Remarque: dans ce modèle de jeu, on a l'égalité trés particuliére:

$$A \otimes B = A \parr B$$

qui doit être comprise comme un "accident" de ce modèle particulier.

La catégorie $\mathcal{J}$ de jeux linéaires

La catégorie $\mathcal{J}$ a

— les jeux linéaires pour objets,

— les stratégies de $A \multimap B$ pour morphisme $A \longrightarrow B$.

On définit comme d'habitude:

— la stratégie identité id_A de $A \multimap A$

— la composée de deux stratégies σ de $A \multimap B$ et τ de $B \multimap C$,

On vérifie:

— que la composition est associative,

— que l'identité est neutre pour la composition.

La sous-catégorie $\mathcal{G}$ des jeux négatifs

Un catégorie $\mathcal{C}$ est sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{D}$ lorsque:

— tout objet de $\mathcal{C}$ est un objet de $\mathcal{D}$,

— tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ est un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}$,

— les identités et lois de composition sont les mêmes.

La sous-catégorie est pleine lorsque,

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$$

pour tout objet A, B de $\mathcal{C}$.

Un jeu linéaire A est négatif lorsque toute partie non vide $s \in P_A$ commence par un coup Opposant.

On définit $\mathcal{G}$ comme la sous-catégorie pleine des jeux négatifs dans $\mathcal{J}$.

Produit cartésien $A\&B$ de jeux négatifs

Soient A, B deux jeux négatifs.

On définit le jeu négatif $A\&B$:

— $M_{A\&B} = M_A + M_B$,

— $\lambda_{A\&B}(m) = \begin{cases} \lambda_A(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } A, \\ \lambda_B(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } B, \end{cases}$

— $P_{A\&B} = P_A + P_B$.

Le jeu linéaire $\top$ est le jeu d'ensemble de coup $M_1 = \emptyset$.

Remarque: de nouveau, l'égalité $1 = \top$ doit être comprise comme un accident du modèle particulier $\mathcal{G}$.

Cette séance:

Quelle est la structure catégorique de $\mathcal{G}$?

exo 2. soit A un jeu négatif.

Montrer que les jeux A, $A \otimes 1$ et $A\&1$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{G}$.

En bref: la catégorie $\mathcal{G}$ n'est pas cartésienne close

exo 3. Montrer que

— $A\&B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie $\mathcal{G}$.

— que l'objet $\top$ est terminal dans $\mathcal{G}$.

En déduire que $(\mathcal{G}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo 4. Montrer que seul l'objet $0 = \top$ admet une exponentiation cartésienne dans la catégorie cartésienne $(\mathcal{G}, \&, \top)$. [Utiliser (1) l'égalité $0 = \top$, (2) que $\mathbf{Hom}(0, A)$ est singleton pour tout objet A, (3) que tout objet B exponentiable définit une bijection

$$\frac{\top \& B \longrightarrow C}{\top \longrightarrow B \Rightarrow C} \quad \phi_{\top,B,C}$$

pour démontrer que $\mathbf{Hom}(B, C)$ est singleton, pour tout objet C.] En déduire que la catégorie $(\mathcal{G}, \&, \top)$ n'est pas cartésienne close.

Mais presque...

exo 5. Utiliser l'associativité et la définition de $\parr$ pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = A \multimap (B \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout jeu linéaire négatif B une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ dans $\mathcal{G}$:

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C} \quad \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en A et C.

Verdict:

— la structure cartésienne est donnée par les additifs $\&$ et $\top$,

— la structure close est donnée par les multiplicatifs $\otimes$ et $\mathbf{1}$.

Prescription:

— il faut une exponentielle pour relier les mondes additifs et multiplicatifs.

II. La structure de $\mathcal{G}$

Catégories symétriques monoïdales closes.

Intuition

Tout refaire comme dans les catégories cartésiennes closes mais en remplaçant le produit cartésien $\times$ par un bifoncteur $\otimes$ arbitraire.

Remplacer la propriétés universelle de $\times$ par une série de diagrammes de cohérence sur $\otimes$.

On obtient une catégorie symétrique monoïdale.

Puis remplacer l'adjonction $\dfrac{A \times B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \Rightarrow C}$ par une adjonction $\dfrac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C}$.

On obtient ainsi une catégorie symétrique monoïdale close (smcc) où on interpréte la logique linéaire multiplicative intuitionniste (=λ-calcul linéaire.)

Catégorie monoïdale

Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

associatif "modulo" un isomorphisme naturel

$$\alpha : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

munie d'un objet 1, unité de $\otimes$ "modulo" un isomorphisme naturel

$$\lambda : 1 \otimes A \longrightarrow A \qquad\qquad \rho : A \otimes 1 \longrightarrow A$$

Ces morphismes doivent faire commuter le "pentagone de MacLane"

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \\ \downarrow{\scriptstyle A\otimes\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha\otimes D} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \end{array}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (1 \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes 1) \otimes B \\ \downarrow{\scriptstyle A\otimes\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \rho\otimes B} \\ A \otimes B & = & A \otimes B \end{array}$$

Symétrie

Une symétrie dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ consiste en une famille d'isomorphismes

$$\gamma_{A,B} \ : \qquad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et B, qui vérifie l'égalité:

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B \quad = \quad A \otimes B \xrightarrow{id_{A\otimes B}} A \otimes B$$

et fait commuter les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes 1 & \xrightarrow{\gamma} & 1 \otimes A \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ A & = & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\gamma} & C \otimes (A \otimes B) \\ {\scriptstyle A\otimes\gamma}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes C) \otimes B & \xrightarrow{\gamma\otimes B} & (C \otimes A) \otimes B \end{array}$$

Exemples de catégories monoidales

Sans symétrie:

— La catégorie des tresses,

— Nous le verrons bientôt: La catégorie $End(\mathcal{C})$ des endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$. Les foncteurs $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont ses objets, les transformations naturelles $F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ sont ses morphismes, et la composition de foncteur son produit tensoriel.

Avec symétrie:

— La catégorie des permutations,

— Toute catégorie cartésienne, avec le produit cartésien pour tenseur, et l'objet terminal pour unité,

— La catégorie duale d'une catégorie monoïdale symétrique,

— Les catégories $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}$ avec tenseur $\otimes$ et unité 1.

exo 6. Démontrer que les exemples forment bien des catégorie monoïdales, avec symétrie dans les trois derniers cas.

Le pourquoi des diagrammes de cohérence

"Every diagram commutes"

Effet Canada Dry: Retrouver une conséquence de la propriété universelle... sans la propriété universelle.

Intuitivement: soit $A_1, ..., A_p$ une liste de p objets dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Un mot w sur $(A_1, ..., A_p)$ est un objet de la forme:

— 1 lorsque $p = 0$,

— $u \otimes v$ où u est un mot sur $(A_1, ..., A_m)$, et v est un mot sur $(A_{m+1}, ..., A_p)$, pour un certain $1 \leq m \leq p$.

Parmi les mots sur $(A_1, ..., A_p)$, le mot canonique $(\cdots(A_1 \otimes A_2) \otimes \cdots A_p)$.

Théorème de cohérence: il n'existe qu'un seul morphisme structural "α, λ, ρ" d'un mot sur $(A_1, ..., A_p)$ au mot canonique sur $(A_1, ..., A_p)$.

En fait: –1– un seul isomorphisme naturel canonique entre des foncteurs mots $\mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}$. –2– Ou bien: toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une catégorie monoïdale symétrique stricte. –3– Ou bien, la catégorie monoïdale symétrique est la catégorie des permutations. Voir chapitres VII.2 et IX dans MacLane.

Exponentiation monoïdale

Soit B un objet dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle exponentiation monoïdale de B le couple formé par un foncteur

$$(B \multimap -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ de bijections indexée par des objets A, C de $\mathcal{C}$:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, B \multimap C)$$

naturelle en A et C.

Catégorie symétrique monoïdale close

Une catégorie symétrique monoïdale close (smcc) est une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ munie d'une exponentiation monoïdale

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{1}$$

pour tout objet B.

Par le théorème du paramètre, $\multimap$ définit un bifoncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

On définit $\text{eval}_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B$ comme le morphisme:

$$A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\gamma_{A,A\multimap B}} (A \multimap B) \otimes A \xrightarrow{\phi^{-1}_{A\multimap B,A,B}(id_{A\multimap B})} B$$

exo 7. Montrer que toute catégorie cartésienne close est une catégorie symétrique monoïdale close.

Logique linéaire multiplicative intuitionniste (IMLL)

$$A, B ::= 1 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid \alpha$$

Axiome $\dfrac{}{A \vdash A}$

$\multimap$ gauche $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$ $\multimap$ droit $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$

$\otimes$ gauche $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$ $\otimes$ droit $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$

1 gauche $\dfrac{\Gamma, 1 \vdash A}{\Gamma \vdash A}$ 1 droit $\dfrac{}{\vdash 1}$

Coupure $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$

Permutation $\dfrac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$

Interprétation de IMLL

Axiome: $A \xrightarrow{id_A} A$

$\multimap$ gauche: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes f \otimes A \multimap B} \Gamma \otimes A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes \mathrm{eval}_{A,B}} \Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$$

$\multimap$ droit: $\Gamma \otimes A \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{\Gamma,A,B}(f)} A \multimap B$.

$\otimes$ gauche: $\Gamma \otimes A \otimes B \xrightarrow{f} C$ reste tel qu'en lui-même.

$\otimes$ droit: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} B$ deviennent $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$

Interprétation de IMLL (suite)

Coupure: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes f} \Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$$

Permutation: $\Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes \gamma_{A_2,A_1} \otimes \Delta} \Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$$

Remarque: pour simplifier, la catégorie est supposée stricte. c'est-à-dire que α, λ et ρ sont toutes des identités.

III. Espaces de cohérence

Un autre modèle important: espaces de cohérence

Un espace de cohérence est un graphe, c'est-à-dire un couple $A = (|A|, \frown_A)$ formé

— d'un ensemble $|A|$ appelé la trame de A

— d'une relation reflexive symétrique $\frown_A \subset |A| \times |A|$ appelée cohérence.

Idée: faire interagir une clique et une anti-clique: un résultat au plus.

On définit:

— La négation $A^\perp$ d'un espace de cohérence A comme son graphe dual,

— La somme $A \oplus B$ de deux espaces de cohérence A et B comme leur somme en tant que graphe,

— Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux espaces de cohérence A et B comme leur produit en tant que graphe,

— Les espaces de cohérence 0 de trame vide et 1 de trame singleton,

En particulier:

dualité	$(A^\perp)^\perp \cong A$	
assoc.+elt neutre	$(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$	$A \oplus 0 \cong A$
assoc.+elt neutre	$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$	$A \otimes 1 \cong A$
distributivité	$A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$	$A \otimes 0 \cong 0$

Espaces de cohérence (2)

Par dualité ou "lois de De Morgan", on définit:

$$A \& B = (A^\perp \oplus B^\perp)^\perp \qquad \top = 0^\perp$$

$$A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp \qquad \bot = 1^\perp$$

Puis la flèche linéaire $\multimap$ entre espaces de cohérence:

$$A \multimap B \quad = \quad A^\perp \parr B \quad = \quad (A \otimes B^\perp)^\perp$$

C'est-à-dire

— $|A \multimap B| = |A| \times |B|$, et

— $(a,b) \subseteq_{A \multimap B} (a',b')$ ssi $\begin{cases} a \subseteq_A a' \text{ implique } b \subseteq_B b' \\ \text{et} \\ b \subseteq_{B^\perp} b' \text{ implique } a \subseteq_{A^\perp} a' \end{cases}$

Espaces de cohérence (3)

La catégorie $\mathbf{Coh}$ a

— les espaces de cohérence comme objets,

— les cliques de $A \multimap B$ comme morphismes $A \longrightarrow B$.

— la composition de clique $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$

$$g \circ f = \{(a, c) \in |A \multimap C| \mid \exists b \in |B| \quad (a, b) \in f \text{ et } (b, c) \in g\}$$

— l'identité $id_A = \{(a, a) \in |A \multimap A|\}$.

IV. La structure de $\mathbf{Coh}$

Dualité et catégories $*$-autonomes.

Catégorie $*$-autonome

Tout couple d'objets $A, \perp$ dans une catégorie symétrique monoïdale close $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, définit un morphisme identité

$$id_{A \multimap \perp} : A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp$$

que $\phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en un morphisme

$$(A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp$$

puis par symétrie

$$\text{eval}_{A,\perp} : A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp$$

et enfin par $\phi_{A, A \multimap \perp, \perp}$

$$A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$$

Un objet $\perp$ est dualisant lorsque le morphisme canonique $A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est un isomorphisme, pour tout objet A.

Une catégorie symétrique monoïdale close avec un objet dualisant est appelé catégorie $*$-autonome.

La catégorie $\mathbf{Coh}$ est $*$-autonome

$\bot = 1^\bot$ est l'espace de cohérence avec la trame singleton $|\bot| = \{*\}$.

$$
\begin{array}{ccc}
e = id_{A \multimap \bot} & A \multimap \bot \longrightarrow A \multimap \bot & \{((a,*),(a,*)) \mid a \in |A|\} \\
f = \phi^{-1}_{A \multimap \bot, A, \bot}(e) & (A \multimap \bot) \otimes A \longrightarrow \bot & \{(((a,*),a),*) \mid a \in |A|\} \\
g = f \circ \gamma_{A, A \multimap \bot} & A \otimes (A \multimap \bot) \longrightarrow \bot & \{((a,(a,*)),*) \mid a \in |A|\} \\
h = \phi_{A, A \multimap \bot, \bot}(g) & A \longrightarrow (A \multimap \bot) \multimap \bot & \{(a,((a,*),*)) \mid a \in |A|\}
\end{array}
$$

Le morphisme h est un isomorphisme, d'inverse la clique

$$h^{-1} = \{((a,*),*),a) \mid a \in |A|\}$$

Remarque: nous verrons dans le cours 4 une caractérisation alternative des catégories $*$-autonomes.

Logique linéaire multiplicative (MLL)

$$A, B ::= A \otimes B \mid \mathbf{1} \mid A \parr B \mid \bot \mid \alpha$$

Axiome	$\dfrac{}{A \vdash A}$
$\otimes$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$
$\parr$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}$
1	$\dfrac{}{\vdash 1}$
$\bot$	$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}$

La logique MLL s'interprète dans toute catégorie $*$-autonome.

Logique linéaire multiplicative additive (MALL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A \parr B \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MLL+

$\oplus$ gauche	$\dfrac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\oplus$ droit	$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
&	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$
0	pas de règle
$\top$	$\dfrac{}{\vdash \Gamma, \top}$

La logique MALL s'interprète dans toute catégorie à la fois cartésienne et $*$-autonome.

Concluons par un problème ouvert

— La catégorie $\mathcal{J}$ est $*$-autonome.

Malheureusement, elle n'est pas cartésienne.

— Sa sous-catégorie $\mathcal{G}$ est symétrique monoidale close et cartésienne.

Malheureusement, elle n'est pas $*$-autonome.

Question ouverte:

Construire une catégorie de jeux $*$-autonome et cartésienne

La solution devra être un modèle de jeux concurrents.