Titre

Sémantique des Jeux

Olivier Laurent + Paul-André Melliès.
DEA SPP

www.pps.jussieu.fr/~mellies/dea2003.html

Cours 4 et 5

Jeux linéaires;
Catégories symétriques monoidales closes ;
Espaces de cohérence;
Dualité et catégories $*$-autonomes

Rappels de la première séance: la catégorie Ens comme ccc

— Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ où sont spécifiés:

- pour chaque couple d'objets A, B, un produit cartésien $A \times B$ et ses projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$,

- un objet terminal $\mathbf{1}$.

— Une catégorie cartésienne close est une catégorie cartésienne où sont spécifiés, pour chaque objet B,

- un foncteur $(B \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,

- une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ indexée par des objets A, C de $\mathcal{C}$,
$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, B \Rightarrow C)$$
naturelle en A et C.

— Théorème du paramètre: la famille $(- \Rightarrow B)_B$ définit un bifoncteur
$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$
d'une unique manière telle que la famille $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

I. Jeux linéaires

Jeux linéaires

Un jeu linéaire A est un triplet

$$A = (M_A, \lambda_A, P_A)$$

où

— M_A est un ensemble dont les éléments sont appelés coups de A,

— $\lambda_A : M_A \longrightarrow \{J, O\}$ est une fonction de polarité sur les coups,

— P_A est un ensemble non vide et clos par préfixe de mots sur l'alphabet M_A.

On appelle partie du jeu A tout mot $s \in P_A$.

Remarque: tout jeu linéaire A admet au moins une partie: la partie vide, notée ϵ.

Stratégies

Une stratégie σ est un ensemble de parties du jeu A, tel que

— toute partie $s \in \sigma$ est vide ou $\begin{cases} \text{commence par un coup Opposant,} \\ \text{termine par un coup Joueur,} \end{cases}$

— alternation toute partie $s \in \sigma$ est alternée,

— clos par préfixe pair si $s \cdot a \cdot b \in \sigma$, alors $s \in \sigma$,

— déterminisme si $s \cdot a \cdot b \in \sigma$ et $s \cdot a \cdot c \in \sigma$, alors $b = c$.

Remarque:
toute partie $s = m_1; ...; m_k$ d'une stratégie σ est donc de longueur paire, avec:

$$\lambda_A(m_i) = O \text{ si } i \text{ est impair} \qquad \lambda_A(m_i) = J \text{ si } i \text{ est pair}$$

Dualité

Le jeu linéaire $A^{\perp}$ est défini en renversant le rôle de O et J:

— $M_{A^{\perp}} = M_A$

— $\lambda_{A^{\perp}}(m) = \begin{cases} O & \text{lorsque } \lambda_A(m) = J, \\ J & \text{lorsque } \lambda_A(m) = O. \end{cases}$

— $P_{A^{\perp}} = P_A$.

Produit tensoriel

Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux jeux linéaires A et B est défini par entrelacement des parties de A et des parties de B:

— $M_{A\otimes B} = M_A + M_B$

— $\lambda_{A\otimes B}(m) = \begin{cases} \lambda_A(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } A, \\ \lambda_B(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } B, \end{cases}$

— une partie $s \in P_{A\otimes B}$ est un mot sur l'alphabet $M_{A\otimes B}$ qui se projette en des parties $s \upharpoonright A \in P_A$ et $s \upharpoonright B \in P_B$.

La définition de projection est habituelle:

— $\epsilon \upharpoonright A = \epsilon$,

— $(s; m) \upharpoonright A = \begin{cases} (s \upharpoonright A); m & \text{si } m \text{ est un coup de } A, \\ s \upharpoonright A & \text{si } m \text{ est un coup de } B. \end{cases}$

exo 1. montrer que le jeu 1 d'ensemble de coup $M_1 = \emptyset$ vérifie $A \otimes 1 = A = 1 \otimes A$ pour tout jeu linéaire A.

Disjonction linéaire $\parr$ et implication linéaire $\multimap$

On définit la disjonction A “par” B par dualité ou “lois de De Morgan”:

$$A \parr B = (A^{\perp} \otimes B^{\perp})^{\perp}$$

Puis la flèche linéaire $\multimap$ entre jeux linéaires:

$$A \multimap B \quad = \quad A^{\perp} \parr B \quad = \quad (A \otimes B^{\perp})^{\perp}$$

Remarque: dans ce modèle de jeu, on a l’égalité très particulière:

$$A \otimes B = A \parr B$$

qui doit être comprise comme un accident du modèle.

La catégorie $\mathcal{J}$ de jeux linéaires

La catégorie $\mathcal{J}$ a

— les jeux linéaires pour objets,

— les stratégies de $A \multimap B$ pour morphisme $A \longrightarrow B$.

On définit comme d'habitude:

— la stratégie identité id_A de $A \multimap A$

— la composée de deux stratégies σ de $A \multimap B$ et τ de $B \multimap C$,

On vérifie:

— que la composition est associative,

— que l'identité est neutre pour la composition.

II. Jeux linéaires négatifs

La sous-catégorie $\mathcal{G}$ des jeux négatifs

Un catégorie $\mathcal{C}$ est sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{D}$ lorsque:

— tout objet de $\mathcal{C}$ est un objet de $\mathcal{D}$,

— tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ est un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}$,

— les identités et lois de composition sont les mêmes.

La sous-catégorie est pleine lorsque,

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$$

pour tout objet A, B de $\mathcal{C}$.

Un jeu linéaire A est négatif lorsque toute partie non vide $s \in P_A$ commence par un coup Opposant.

On définit $\mathcal{G}$ comme la sous-catégorie pleine des jeux négatifs dans $\mathcal{J}$.

Produit cartésien $A\&B$ de jeux négatifs

On définit le jeu négatif $A\&B$ à partir de deux jeux négatifs A, B:

— $M_{A\&B} = M_A + M_B$,

— $\lambda_{A\&B}(m) = \begin{cases} \lambda_A(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } A, \\ \lambda_B(m) & \text{lorsque } m \text{ est un coup de } B, \end{cases}$

— $P_{A\&B} = P_A + P_B$.

Le jeu linéaire $\top$ est le jeu dont l'ensemble des coups est $M_\top = \emptyset$.

Remarque: de nouveau, l'égalité $1 = \top$ est un "accident" du modèle $\mathcal{G}$.

exo 2. Montrer que A, $A \otimes 1$ et $A\&1$ sont isomorphes dans $\mathcal{G}$ pour tout jeu A négatif.

■

Cette séance:

$\boxed{\textbf{Quelle est la structure catégorique de } \mathcal{G} \textbf{ ?}}$

En bref: la catégorie $\mathcal{G}$ n'est pas cartésienne close

exo 3. Montrer que

— $A \& B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie $\mathcal{G}$.

— que l'objet $\top$ est terminal dans $\mathcal{G}$.

En déduire que $(\mathcal{G}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo 4. Montrer que la catégorie $\mathcal{G}$ n'est pas cartésienne close.

Mais presque...

exo 5. Utiliser l'associativité et la définition de $⅋$ pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = A \multimap (B \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout jeu linéaire négatif B une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ dans $\mathcal{G}$:

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C} \quad \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en A et C.

Verdict:

— la structure cartésienne est donnée par les additifs $\&$ et $\top$,

— la structure close est donnée par les multiplicatifs $\otimes$ et $\mathbf{1}$.

Prescription:

— il faut une exponentielle pour relier les mondes additifs et multiplicatifs.

III. La structure de $\mathcal{G}$

Catégories symétriques monoïdales closes.

Intuition

Tout refaire comme dans les catégories cartésiennes closes mais en remplaçant le produit cartésien $\times$ par un bifoncteur $\otimes$ arbitraire.

Remplacer la propriétés universelle de $\times$ par une série de diagrammes de cohérence sur $\otimes$.

On obtient une catégorie symétrique monoïdale.

Puis remplacer l'adjonction $\dfrac{A \times B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \Rightarrow C}$ par une adjonction $\dfrac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C}$.

On obtient ainsi une catégorie symétrique monoïdale close (smcc) où on interpréte la logique linéaire multiplicative intuitionniste (=λ-calcul linéaire.)

Catégorie monoïdale

Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

associatif "modulo" un isomorphisme naturel

$$\alpha : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

munie d'un objet 1, unité de $\otimes$ "modulo" un isomorphisme naturel

$$\lambda : 1 \otimes A \longrightarrow A \qquad\qquad \rho : A \otimes 1 \longrightarrow A$$

Ces morphismes doivent faire commuter le "pentagone de MacLane"

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha\otimes D"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (1 \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\lambda"'] & (A \otimes 1) \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes B"] \\
A \otimes B \arrow[r, equal] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Symétrie

Une symétrie dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ consiste en une famille d'isomorphismes

$$\gamma_{A,B} \quad : \qquad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et B, qui vérifie l'égalité:

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B \quad = \quad A \otimes B \xrightarrow{id_{A\otimes B}} A \otimes B$$

et fait commuter les diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes 1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho"'] & 1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\gamma"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\gamma\otimes B"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Exemples de catégories monoidales

Sans symétrie:

— La catégorie des tresses,

— Nous le verrons bientôt: La catégorie $End(\mathcal{C})$ des endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$. Les foncteurs $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont ses objets, les transformations naturelles $F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ sont ses morphismes, et la composition de foncteur son produit tensoriel.

Avec symétrie:

— La catégorie des permutations,

— Toute catégorie cartésienne, avec le produit cartésien pour tenseur, et l'objet terminal pour unité,

— La catégorie duale d'une catégorie monoïdale symétrique,

— Les catégories $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}$ avec tenseur $\otimes$ et unité 1.

exo 6. Démontrer que les exemples forment bien des catégorie monoïdales, avec symétrie dans les trois derniers cas.

Le pourquoi des diagrammes de cohérence

$\boxed{\text{“Every diagram commutes”}}$

Effet Canada Dry: Retrouver une conséquence de la propriété universelle... sans la propriété universelle.

Intuitivement: soit $A_1, ..., A_p$ une liste de p objets dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Un mot w sur $(A_1, ..., A_p)$ est un objet de la forme:

— 1 lorsque $p = 0$,

— $u \otimes v$ où u est un mot sur $(A_1, ..., A_m)$, et v est un mot sur $(A_{m+1}, ..., A_p)$, pour un certain $1 \leq m \leq p$.

Parmi les mots sur $(A_1, ..., A_p)$, le mot canonique $(\cdots(A_1 \otimes A_2) \otimes \cdots A_p)$.

Théorème de cohérence: il n'existe qu'un seul morphisme structural “α, λ, ρ” d'un mot sur $(A_1, ..., A_p)$ au mot canonique sur $(A_1, ..., A_p)$.

En fait: −1− un seul isomorphisme naturel canonique entre des foncteurs mots $\mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}$. −2− Ou bien: toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une catégorie monoïdale symétrique stricte. −3− Ou bien, la catégorie monoïdale symétrique est la catégorie des permutations. Voir chapitres VII.2 et IX dans MacLane.

Exponentiation monoïdale

Soit B un objet dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle exponentiation monoïdale de B le couple formé par un foncteur

$$(B \multimap -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ de bijections indexée par des objets A, C de $\mathcal{C}$:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, B \multimap C)$$

naturelle en A et C.

Catégorie symétrique monoïdale close

Une catégorie symétrique monoïdale close (smcc) est une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation monoïdale

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{1}$$

pour tout objet B.

Par le théorème du paramètre, $\multimap$ définit un bifoncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

On définit $\mathsf{eval}_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B$ comme le morphisme:

$$A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\gamma_{A,A \multimap B}} (A \multimap B) \otimes A \xrightarrow{\phi^{-1}_{A \multimap B,A,B}(id_{A \multimap B})} B$$

exo 7. Montrer que toute catégorie cartésienne close est une catégorie symétrique monoïdale close.

Logique linéaire multiplicative intuitionniste (IMLL)

$$A, B ::= \mathbf{1} \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid \alpha$$

	Axiome	$\dfrac{}{A \vdash A}$	
$\multimap$ gauche	$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$	$\multimap$ droit	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$
$\otimes$ gauche	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$	$\otimes$ droit	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$
$\mathbf{1}$ gauche	$\dfrac{\Gamma, \mathbf{1} \vdash A}{\Gamma \vdash A}$	$\mathbf{1}$ droit	$\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}$
	Coupure	$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$	
	Permutation	$\dfrac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$	

Interprétation de IMLL

Axiome: $A \xrightarrow{id_A} A$

$\multimap$ gauche: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes f \otimes A \multimap B} \Gamma \otimes A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes \mathsf{eval}_{A,B}} \Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$$

$\multimap$ droit: $\Gamma \otimes A \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{\Gamma,A,B}(f)} A \multimap B$.

$\otimes$ gauche: $\Gamma \otimes A \otimes B \xrightarrow{f} C$ reste tel qu'en lui-même.

$\otimes$ droit: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} B$ deviennent $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$

Interprétation de IMLL (suite)

Coupure: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes f} \Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$$

Permutation: $\Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes \gamma_{A_2,A_1} \otimes \Delta} \Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$$

Remarque: pour simplifier, la catégorie est supposée stricte. c'est-à-dire que α, λ et ρ sont toutes des identités.

IV. Espaces de cohérence

Un autre modèle important: espaces de cohérence

Un espace de cohérence est un graphe, c'est-à-dire un couple $A = (|A|, \frown_A)$ formé

— d'un ensemble $|A|$ appelé la trame de A

— d'une relation reflexive symétrique $\frown_A \subset |A| \times |A|$ appelée cohérence.

Idée: faire interagir une clique et une anti-clique: un résultat au plus.

On définit:

— La négation $A^\perp$ d'un espace de cohérence A comme son graphe dual,

— La somme $A \oplus B$ de deux espaces de cohérence A et B comme leur somme en tant que graphe,

— Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux espaces de cohérence A et B comme leur produit en tant que graphe,

— Les espaces de cohérence 0 de trame vide et 1 de trame singleton,

En particulier:

dualité	$(A^\perp)^\perp \cong A$	
assoc.+elt neutre	$(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$	$A \oplus 0 \cong A$
assoc.+elt neutre	$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$	$A \otimes 1 \cong A$
distributivité	$A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$	$A \otimes 0 \cong 0$

Espaces de cohérence (2)

On définit la disjonction A "par" B par dualité ou "lois de De Morgan" :

$$A \& B = (A^\perp \oplus B^\perp)^\perp \qquad \top = 0^\perp$$

$$A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp \qquad \perp = 1^\perp$$

Puis la flèche linéaire $\multimap$ entre espaces de cohérence:

$$A \multimap B \quad = \quad A^\perp \parr B \quad = \quad (A \otimes B^\perp)^\perp$$

C'est-à-dire

— $|A \multimap B| = |A| \times |B|$, et

— $(a, b) \frown_{A \multimap B} (a', b')$ ssi $\begin{cases} a \frown_A a' \text{ implique } b \frown_B b' \\ \text{et} \\ b \frown_{B^\perp} b' \text{ implique } a \frown_{A^\perp} a' \end{cases}$

Espaces de cohérence (3)

La catégorie **Coh** a

— les espaces de cohérence comme objets,

— les cliques de $A \multimap B$ comme morphismes $A \longrightarrow B$.

— la composition de clique $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$

$$g \circ f = \{(a,c) \in |A \multimap C| \mid \exists b \in |B| \quad (a,b) \in f \text{ et } (b,c) \in g\}$$

— l'identité $id_A = \{(a,a) \in |A \multimap A|\}$.

$\mathbf{Coh}$ n'est pas cartésienne close (4)

exo 8. Montrer que

— $A\&B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie $\mathbf{Coh}$.

— que l'objet $\top$ est terminal dans $\mathcal{C}$.

En déduire que $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo 9. Montrer que seul l'objet $0 = \top$ admet une exponentiation cartésienne dans la catégorie cartésienne $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$. [Utiliser (1) l'égalité $0 = \top$, (2) que $\mathbf{Hom}(0, A)$ est singleton pour tout objet A, (3) que tout objet B exponentiable définit une bijection

$$\frac{\top\&B \longrightarrow C}{\top \longrightarrow B \Rightarrow C} \quad \phi_{\top,B,C}$$

pour démontrer que $\mathbf{Hom}(B, C)$ est singleton, pour tout objet C.] En déduire que la catégorie $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ n'est pas cartésienne close.

$\mathbf{Coh}$ est symétrique monoidale close (5)

exo 10. Utiliser l'associativité et la définition de $⅋$ pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = A \multimap (B \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout jeu espace de cohérence B une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ dans $\mathbf{Coh}$:

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{A \longrightarrow B \multimap C} \quad \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en A et C.

V. La structure de $\mathbf{Coh}$

Dualité et catégories $*$-autonomes.

Catégorie $*$-autonome

Tout couple d'objets $A, \perp$ dans une catégorie symétrique monoïdale close $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, définit un morphisme identité

$$id_{A \multimap \perp} : A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp$$

que $\phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en un morphisme

$$(A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp$$

puis par symétrie

$$\mathsf{eval}_{A,\perp} : A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp$$

et enfin par $\phi_{A, A \multimap \perp, \perp}$

$$A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$$

Un objet $\perp$ est dualisant lorsque le morphisme canonique $A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est un isomorphisme, pour tout objet A.

Une catégorie symétrique monoïdale close avec un objet dualisant est appelé catégorie $*$-autonome.

La catégorie $\mathbf{Coh}$ est $*$-autonome

$\perp = 1^{\perp}$ est l'espace de cohérence avec la trame singleton $|\perp| = \{*\}$.

$$
\begin{array}{lll}
e = id_{A \multimap \perp} & A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp & \{((a,*),(a,*)) \mid a \in |A|\} \\
f = \phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}(e) & (A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp & \{(((a,*),a),*) \mid a \in |A|\} \\
g = f \circ \gamma_{A, A \multimap \perp} & A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp & \{((a,(a,*)),*) \mid a \in |A|\} \\
h = \phi_{A, A \multimap \perp, \perp}(g) & A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp & \{(a,((a,*),*)) \mid a \in |A|\}
\end{array}
$$

Le morphisme h est un isomorphisme, d'inverse la clique

$$h^{-1} = \{(((a,*),*),a) \mid a \in |A|\}$$

Remarque: nous verrons dans le cours 4 une caractérisation alternative des catégories $*$-autonomes.

Logique linéaire multiplicative (MLL)

$$A, B ::= A \otimes B \mid \mathbf{1} \mid A \parr B \mid \bot \mid \alpha$$

Axiome	$\dfrac{}{A \vdash A}$
$\otimes$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$
$\parr$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}$
1	$\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}$
$\bot$	$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}$

La logique MLL s'interprète dans toute catégorie $*$-autonome.

Logique linéaire multiplicative additive (MALL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A ⅋ B \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MLL+

$\oplus$ gauche	$\dfrac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\oplus$ droit	$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\&$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$
0	pas de règle
$\top$	$\dfrac{}{\vdash \Gamma, \top}$

La logique MALL s'interprète dans toute catégorie à la fois cartésienne et $*$-autonome.

Un problème intéressant

— La catégorie $\mathcal{J}$ est $*$-autonome.

Malheureusement, elle n'est pas cartésienne.

— Sa sous-catégorie $\mathcal{G}$ est cartésienne et symétrique monoidale close.

Malheureusement, elle n'est pas $*$-autonome.

Question débattue actuellement:

qu'est-ce que serait une catégorie de jeux $*$-autonome et cartésienne?

VI. Structure de $\mathcal{G}$ et de $\mathbf{Coh}$

Les exponentielles.

Le nouvel ingrédient: l'exponentielle (dans les espaces de cohérence)

On définit l'exponentielle $!A$ d'un espace de cohérence A comme le graphe

— dont la trame $|!A|$ est l'ensemble des cliques finies de A,

— $u \frown_{!A} v$ ssi l'union $u \cup v$ est une clique finie de A.

exo 11. Montrer que $!A$ définit un dI-domaine dont $|!A|$ est l'ensemble des éléments compacts, ordonnés par inclusion entre cliques finies.

L'espace de cohérence $?A$ est défini par:

$$?A = (!A^{\perp})^{\perp}$$

L'alchimie exponentielle

Le rôle de l'exponentielle est de transmuter les additifs en multiplicatifs!

Le nom "exponentielle" est justifié par les isomorphismes suivants:

$$!(A\&B) \;\cong\; !A\otimes !B \qquad\qquad !\top \;\cong\; 1$$

Réminiscent de $\wp(A+B) \cong \wp(A) \times \wp(B)$ dans $\mathbf{Ens}$.

Nous étudierons plus loin les propriétés catégoriques de l'exponentielle !. En particulier,

— chaque $!A$ définit un comonoïde $(!A, d_A, e_A)$ dans $\mathbf{Coh}$,

— l'exponentielle définit une comonade $(!, \delta, \mathrm{der})$ dans $\mathbf{Coh}$,

— la diagonale cartésienne $A \longrightarrow A\&A$ est transportée sur la diagonale comonoidale $!A \longrightarrow !A\otimes !A$.

exo 12. Montrer que les égalités $A\otimes(B\&C) \cong (A\otimes B)\&(A\otimes C)$ et $!(A\oplus B) \cong !A ⅋ !B$ sont fausses. Début d'un tableau de Mendeleiev! Effets des polarités, très importants par la suite.

Logique linéaire (LL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid !A \mid 0 \mid 1 \mid A \& B \mid A \parr B \mid ?A \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MALL+

contraction $\dfrac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$

affaiblissement $\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$

déréliction $\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$

renforcement $\dfrac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}$

Exponentielle répétitive incrémentale (dans les jeux négatifs)

Soit A un jeu négatif.

Le jeu linéaire négatif $!A$ est défini comme suit:

— $M_{!A} = M_A \times \mathbb{N}$,

— $\lambda_{!A}(m,i) = \lambda_A(m)$,

— un mot s sur l'alphabet $M_{!A}$ est élément de $P_{!A}$ ssi

(1) $s \upharpoonright i$ est élément de P_A, pour tout indice i,

(2) les copies sont ouvertes de manière incrémentale:

pour tout préfixe t de s, et indice i de copie,

$$t \upharpoonright i = \epsilon \;\Rightarrow\; t \upharpoonright i+1 = \epsilon$$

IMLL+ additifs

$$A, B ::= 1 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid A \& B \mid \top \mid \alpha$$

IMLL+

& gauche-1	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}$
& gauche-2	$\dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}$
& droit	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$
vrai	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$

Logique Linéaire Intuitionniste (ILL)

$$A, B ::= 1 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid A \& B \mid !A \mid \top \mid \alpha$$

IMLL+ additifs +

contraction	$\dfrac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}$
affaiblissement	$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}$
déréliction	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}$
renforcement	$\dfrac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}$

Interprétation de l'entier de Church 0 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.x$$

$$\begin{array}{cccccccc}
! & (A & \multimap & A) & \multimap & (A & \multimap & A) \\
 & & & & & & & q \\
 & & & & & q & & \\
 & & & & & k & & \\
 & & & & & & & k
\end{array}$$

Interprétation de l'entier de Church 1 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \longrightarrow A).\lambda x : A.fx$$

$$\begin{array}{cccccccc}
! & (A & \multimap & A) & \multimap & (A & \multimap & A) \\
 & & & & & & & q \\
 & & & (q,1) & & & & \\
 & (q,1) & & & & & & \\
 & & & & & q & & \\
 & & & & & k & & \\
 & (k,1) & & & & & & \\
 & & & (f(k),1) & & & & \\
 & & & & & & & f(k)
\end{array}$$

Interprétation de l'entier de Church 2 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.f(fx)$$

$!$	$(A$	$\multimap$	$A)$	$\multimap$	$(A$	$\multimap$	$A)$
							q
			$(q,1)$				
	$(q,1)$						
			$(q,2)$				
	$(q,2)$						
					q		
					k		
	$(k,2)$						
			$(f(k),2)$				
	$(f(k),1)$						
			$(f(f(k)),1)$				
							$f(f(k))$

VI. Comonoïdes.

Monoïde

Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un monoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xrightarrow{u} A \xleftarrow{m} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A \otimes m"'] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[r, "u \otimes A"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes 1 \arrow[l, "A \otimes u"'] \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Exemple: tout monoïde dans $(\mathbf{Ens}, \times, 1)$.

Comonoïde

Dualement: Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un comonoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$\begin{tikzcd} 1 & A \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "d"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d"] \arrow[d, "d"'] & & A \otimes A \arrow[d, "d\otimes A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "A\otimes d"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes A) \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[l, "e\otimes A"'] \arrow[r, "A\otimes\eta"] & A \otimes 1 \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "d"] \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Comonoïde commutatif

Un comonoïde (A, d, e) dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \gamma)$ est dit commutatif lorsque

$$A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{\gamma_{A,A}} A \otimes A \quad = \quad A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

Morphisme comonoïdal

Un morphisme

$$f : (A, d_A, e_A) \longrightarrow (B, d_B, e_B)$$

est comonoidal lorsque les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_A"'] & B \arrow[d, "e_B"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, equal, "id"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

Catégorie des comonoïdes

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ une catégorie symétrique monoidale.

On définit la catégorie $\mathbf{coMon}(\mathcal{C})$

— dont les objets sont les comonoides commutatifs de $\mathcal{C}$,

— dont les morphismes

$$(A, d_A, e_A) \longrightarrow (B, d_B, e_B)$$

sont les morphisms comonoidaux de $\mathcal{C}$.

exo 13. montrer que $\otimes$ définit un produit cartésien dans $\mathbf{coMon}(\mathcal{C})$.

VII. Adjonctions et monades

Adjonction

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{X}$ deux catégories.

Une adjonction de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{A}$ est un triplet (F, G, ϕ) où F et G sont deux foncteurs

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A} \qquad\qquad G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets X dans $\mathcal{X}$ et A dans $\mathcal{A}$,

$$\phi_{A,B} : \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), A) \ \cong \ \mathbf{Hom}_{\mathcal{X}}(X, G(A))$$

naturelle en A et X. On écrit aussi:

$$\frac{F(X) \longrightarrow_{\mathcal{A}} A}{X \longrightarrow_{\mathcal{X}} G(A)} \quad \phi_{X,A}$$

Dans ce cas, on dit que F est adjoint à gauche de G, et on écrit $F \dashv G$.

Exemple: $\mathcal{A}$ est la catégorie des k-espaces vectoriels, pour k un corps, et $\mathcal{X}$ est la catégorie des ensembles. G est le foncteur d'oubli, et F le foncteur qui à un ensemble X associe le k-espace vectoriel $F(X)$ de base X.

Exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{X}$ est la catégorie $\mathbf{Coh}$ des espaces cohérents, avec $F = (-\otimes B)$ et $G = (B \multimap -)$.

Adjonction (2)

De manière équivalente:

Une adjonction est un quadruplet (F, G, η, ϵ) où F et G sont des foncteurs

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A} \qquad\qquad G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$$

et η et ϵ des transformations naturelles:

$$\eta : Id_{\mathcal{X}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF \qquad\qquad \epsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{A}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de F et G respectivement).

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G \qquad\qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

On dessine cette situation de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "Id_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{A} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathcal{A}}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

exo 14. montrer l'équivalence entre les deux notions d'adjonction.

Adjonction, monade et comonade

On peut montrer que toute adjonction (F, G, ϕ) définit:

— une monade $(GF, \eta, G\epsilon F)$ dans $\mathcal{X}$,

— une comonade $(FG, \epsilon, F\eta G)$ dans $\mathcal{A}$.

Réciproquement, les catégoriciens ont étudié comment construire une adjonction (F, G, ϕ) à partir d'une comonade $(T, \delta, \mathrm{der})$ donnée dans $\mathcal{A}$, voir dans [Mac Lane 1971].

Leur réponse: une catégorie d'adjonctions avec

— un objet initial: la catégorie de co-Kleisli $\mathbf{K_T}(\mathcal{A})$, et l'adjonction (F, G, ϕ)

$$F : \mathbf{K_T}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \qquad G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{K_T}(\mathcal{A})$$

où F transporte A en $T(A)$, et G transporte A en A,

— un objet terminal: la catégorie des T-coalgèbres $\mathbf{A_T}(\mathcal{A})$, et l'adjonction (F, G, ϕ)

$$F : \mathbf{A_T}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \qquad G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{A_T}(\mathcal{A})$$

où F est le foncteur d'oubli, et G transporte A en sa coalgèbre libre (TA, δ_A).

Comonade.

Un comonade (T, δ, der) dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,

— de deux transformations naturelles

$$\delta : T \longrightarrow T \circ T \qquad\qquad \text{der} : T \longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & T \circ T \arrow[d, "T \circ \delta"] \\
T \circ T \arrow[r, "\delta \circ T"] & T \circ T \circ T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & T \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta"] & T \arrow[d, equal] \\
T & T \circ T \arrow[l, "\text{der} \circ T"'] \arrow[r, "T \circ \text{der}"] & T
\end{tikzcd}$$

Catégorie de Kleisli

Soit $(T, \delta, \mathrm{der})$ une comonade dans une catégorie $\mathcal{C}$. La catégorie de co-Kleisli $\mathbf{K_T}(\mathcal{C})$ est définie de la manière suivante:

— ses objets sont les objets de $\mathcal{C}$,

— ses morphismes $A \dashrightarrow B$ sont les morphismes de $TA \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$,

Les identités $A \dashrightarrow A$ sont données par les morphismes $\mathrm{der}_A : TA \longrightarrow A$.

On compose $f : A \dashrightarrow B$ et $g : B \dashrightarrow C$ de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
TTA \arrow[dr, "Tf"] & & \\
TA \arrow[u, "\delta_A"'] \arrow[dr, "f"] & TB \arrow[dr, "g"] & \\
& B & C
\end{tikzcd}$$

exo 15. montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

VIII. Structure exponentielle.

Exponentielle

Une structure exponentielle dans une catégorie symmétrique monoidale et cartésienne, est la donnée de:

— un comonoide commutatif pour tout objet A,

$$1 \xleftarrow{e} !A \xrightarrow{d} !A \otimes !A$$

— un morphisme $\mathrm{der}_A : !A \longrightarrow A$ appelé déreliction, tel que pour tout morphisme $f : !A \longrightarrow B$ il existe un et un seul morphisme comonoidal $g : !A \longrightarrow !B$ qui fasse commuter:

$$\begin{tikzcd} & !B \arrow[d, "\mathrm{der}_B"] \\ !A \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

— d'isomorphismes comonoidaux:

$$!(A \& B) \cong !A \otimes !B \longrightarrow A \qquad\qquad !\top \cong 1$$

Théorème (voir l'article)

Munie d'une structure exponentielle:

Une catégorie $*$-autonome et cartésienne définit un modèle de LL

Une catégorie sym. monoidale close et cartésienne définit un modèle de ILL.

Adjonction entre la catégorie linéaire $\mathcal{C}$ et la catégorie comonoidale $\mathcal{M}$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne et symétrique monoidale close.

Soit ! une structure exponentielle sur $\mathcal{C}$,

Soit $\mathcal{M}$ la sous-catégorie pleine dans $\mathbf{coMon}(\mathcal{C})$ des comonoides $!A$.

Alors $\mathcal{M}$ est une catégorie cartésienne et on a l'adjonction:

$$\mathcal{M}(X, F(A)) \cong \mathcal{C}(U(X), A)$$

où

— on note $U(X)$ le support du comonoide X,

— on note $F(A)$ le comonoide $!A$ vu dans $\mathcal{M}$.

Théorème fondamental de ce cours

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne et symétrique monoidale close.

Soit ! une structure exponentielle sur $\mathcal{C}$,

Alors

(1) ! est une comonade sur la catégorie $\mathcal{C}$,

(2) la catégorie de co-Kleisli $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$ est cartésienne close.

Au sujet des produits dans $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ pour T une comonade

Théorème: Soit (T, δ, der) une comonade dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \&, \top)$.

Alors, la catégorie $(\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}), \&, \top)$ est cartésienne elle aussi.

Démonstration: En effet,

— $\top$ est terminal dans $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$,

— $A\&B$ est le produit de A et B, lorsqu'on le munit des projections

$$A\&B \overset{\pi_1^\bullet}{\dashrightarrow} A \quad = \quad T(A\&B) \xrightarrow{\text{der}_{A\&B}} A\&B \xrightarrow{\pi_1} A$$

$$A\&B \overset{\pi_2^\bullet}{\dashrightarrow} B \quad = \quad T(A\&B) \xrightarrow{\text{der}_{A\&B}} A\&B \xrightarrow{\pi_2} B$$

En effet, tout couple de morphismes $X \dashrightarrow A$ et $X \dashrightarrow B$ de $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$,

$$X \dashrightarrow A \quad = \quad T(X) \xrightarrow{f} A \qquad\qquad X \dashrightarrow B \quad = \quad T(X) \xrightarrow{g} B$$

définit un morphisme $X \dashrightarrow A\&B$ de $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$,

$$X \dashrightarrow A\&B \quad = \quad T(X) \xrightarrow{(f,g)} A\&B$$

Des produits dans $\mathbf{K_T}(\mathcal{C})$ pour T une comonade (2)

Ce morphisme $X \overset{(f,g)}{\dashrightarrow} A\&B$ est une solution du problème:

$$X \overset{(f,g)}{\dashrightarrow} A\&B \dashrightarrow A \quad = \quad \begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[dr, "T(f,g)"] & & \\ T(X) \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[dr, "(f,g)"'] & T(A\&B) \arrow[d, "\mathsf{der}_{A\&B}"] \arrow[dr, "\pi_1^\bullet"] & \\ & A\&B \arrow[r, "\pi_1"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad X \overset{f}{\dashrightarrow} A$$

Pour en démontrer l'unicité, supposons que $h : X \dashrightarrow A\&B$ vérifie

$$X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \overset{\pi_1^\bullet}{\dashrightarrow} A \quad = \quad X \overset{f}{\dashrightarrow} A \qquad\qquad X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \overset{\pi_2^\bullet}{\dashrightarrow} B \quad = \quad X \overset{g}{\dashrightarrow} B$$

L'universalité de $A \overset{\pi_1}{\leftarrow} A\&B \overset{\pi_2}{\rightarrow} B$, et le diagramme suivant pour f (et pour g):

$$X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \dashrightarrow A \quad = \quad \begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[dr, "Th"] & & \\ T(X) \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[dr, "h"'] & T(A\&B) \arrow[d, "\mathsf{der}_{A\&B}"] \arrow[dr, "\pi_1^\bullet"] & \\ & A\&B \arrow[r, "\pi_1"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad X \overset{f}{\dashrightarrow} A$$

caractérisent $h : T(X) \longrightarrow A\&B$ dans la catégorie $\mathcal{C}$, comme $h = (f, g)$.

La catégorie $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$n'est pas seulement cartésienne, elle est close

Par le résultat précèdent, la catégorie $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$ est cartésienne. L'exponentiation

$$(B \Rightarrow -) : \mathbf{K}_!(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{K}_!(\mathcal{C})$$

est donnée par

$$(B \Rightarrow -) = (!B \multimap -)$$

pour chaque objet B de $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$.

La série de bijections naturelles en A et C suivante établit que $(B \Rightarrow -)$ définit une exponentiation de B dans la catégorie $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc}
A \& B & \dashrightarrow & C \\
\hline
!(A \& B) & \longrightarrow & C \\
\hline
!A \otimes !B & \longrightarrow & C \\
\hline
!A & \longrightarrow & !B \multimap C \\
\hline
A & \dashrightarrow & !B \multimap C
\end{array}$$

Thm: la catégorie $\mathbf{K}_!(\mathcal{C})$ est cartésienne close.

$\boxed{\text{Fin du cours}}$

Montrer que ! définissent des exponentielles sur $\mathbf{Coh}$ et $\mathcal{G}$.