Ordres partiels: terminologie et notation.

Soient

$(D, \leq)$ un *ensemble partiellement ordonné*,

$A \subseteq D$,

$x, y, z \in D$.

- x est un *minorant* (resp. *majorant*) de A si $\forall y \in A\ x \leq y$ (resp $\forall y \in A\ y \leq x$).
- x est le *minimum* (resp. *maximum*) de A si $x \in A$ et x est un minorant (resp. majorant) de A.
- x est la *borne superieure* ou *sup* (resp. *borne inferieure* ou *inf*) de A si x est le minimum de l'ensemble des majorants de A (resp. le maximum de l'ensemble des minorants de A).

  Notation: $x = \bigvee A$ ($x = \bigwedge A$).

- x et y sont *compatibles* si $\{x, y\}$ a un majorant.

  Notation $x \uparrow y$.

- A est *dirigé* si $\forall a, b \in A\ \exists c \in A\ a, b \leq z$.

- $(D, \leq)$ est un *ordre partiel complet* ou *cpo* si toute partie dirigé de D a un sup.

- Soient $(D, \leq), (E, \preceq)$ cpo. Une fonction $f : D \to E$ est *(Scott-)continue* si

  1. f est monotone croissante: $x \leq y \ \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$.
  2. f commute aux sup dirigés: si $\Delta \subseteq D$ est dirigé, $f(\bigvee \Delta) = \bigvee_{x \in \Delta} f(x)$.

- (si D est un cpo) x est *algébrique* si pour toute partie dirigée $\Delta \subseteq D$, $(x \leq \bigvee \Delta) \ \Rightarrow\ \exists a \in \Delta\ x \leq a$.

Catégories: terminologie et notation.

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de:

- une classe d'*objets*.
- pour toute couple d'objets (A, B), un ensemble de *morphismes* de A dans B, $Hom(A, B)$.
- d'une loi de composition
  $\circ : Hom(B, C) \times Hom(A, B) \to Hom(A, C)$.
- pour tout objet A, un morphisme *idéntité* de A,
  $id_A \in Hom(A, A)$.
- tels que:
  1. pour tout $(f, g, h) \in Hom(A, B) \times Hom(B, C) \times Hom(C, D)$
     $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
  2. pour tout $f \in Hom(A, B)$, $f \circ id_A = id_B \circ f = f$

Exemples de catégories

- La catégorie Set des ensembles et fonctions.
- La catégorie Cpo des ordres partiels complets et fonctions continues.