Sémantique de jeux: exercises 3

Russ Harmer

January 24, 2007

1 Fonctions de vue

Quelles sont les fonctions de vue de

- $\vdash \lambda fx\ (f\ (f\ x)) : (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}) \to \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$
- $x : \mathtt{nat} \vdash (\mathtt{zero?}\ x) : \mathtt{bool}$
- $D_1 = f : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat} \vdash \lambda x\ (\mathtt{if}\ (\mathtt{zero?}\ x)\ \mathtt{0}\ \mathtt{else}\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{succ}\ (f)(\mathtt{pred}\ x)))) :$ $\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$
- $D_2 = f : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat} \vdash \lambda x\ (\mathtt{let}\ z = x\ \mathtt{in}\ (\mathtt{if}\ (\mathtt{zero?}\ z)\ \mathtt{0}\ \mathtt{else}\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{succ}\ (f)(\mathtt{pred}\ z))))) :$ $\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$
- $\mathsf{Kx} = \lambda F(F)\lambda x(F)\lambda y(x) : ((\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}$
- $\mathsf{Ky} = \lambda F(F)\lambda x(F)\lambda y(y) : ((\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}$
- $N = \lambda f\ (\mathtt{if}\ (f)\mathtt{tt}\ (\mathtt{if}\ (f)\mathtt{ff}\ \mathtt{ff}\ \mathtt{else}\ \mathtt{tt})\ \mathtt{else}\ (\mathtt{if}\ (f)\mathtt{ff}\ \mathtt{tt}\ \mathtt{else}\ \mathtt{tt})) :$ $(\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}$
- $\vdash (\mathtt{fixpt}\ \lambda f\ D_1) : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$
- $\vdash (\mathtt{fixpt}\ \lambda f\ D_2) : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$

2 Interactions

Calculez les interactions pour

- $\vdash (\lambda fx\ (f\ (f\ x)))(\lambda x\ (\mathtt{succ}\ x))\mathtt{3} : \mathtt{nat}$
- $\vdash (\mathtt{fixpt}\ \lambda f\ D_2)\mathtt{1} : \mathtt{nat}$
- $\vdash (\mathtt{fixpt}\ \lambda f\ D_2)\mathtt{2} : \mathtt{nat}$
- $\vdash (\mathtt{fixpt}\ \lambda f\ D_1)\mathtt{2} : \mathtt{nat}$
- $(\mathsf{Kx})N$
- $(\mathsf{Ky})N$

3 Une ordre sur les stratégies

On définit une ordre sur les stratégies pour A par: $\sigma \leqslant_A \tau$ ssi $\sigma \subseteq \tau$. Démontrez que

- $\langle A, \leqslant_A \rangle$ est un CPO, où $\bigsqcup \Delta$ est définit comme: $\bigcup_{\sigma \in \Delta}$
- $\bigsqcup \Delta$ est innocente si chaque $\tau \in \Delta$ est innocente

Démontrez que

- la composition de stratégies est monotone w.r.t. l'ordre: si $\sigma, \sigma' : A \Rightarrow B$ et $\tau, \tau' : B \Rightarrow C$ t.q. $\sigma \leqslant \sigma'$ et $\tau \leqslant \tau'$ alors $\sigma \,;\, \tau \leqslant_{A \Rightarrow C} \sigma' \,;\, \tau'$
- composition est également continue: $\sigma \,;\, \bigsqcup \Delta = \bigsqcup \{\sigma \,;\, \tau \mid \tau \in \Delta\}$ (il faut d'abord démontrer que $\{\sigma \,;\, \tau \mid \tau \in \Delta\}$ est une ensemble dirigée)

Demontrez que, pour innocente $\sigma, \tau : A$,

- $\sigma \leqslant_A \tau$ si et seulement si $\ulcorner \sigma \urcorner \subseteq \ulcorner \tau \urcorner$.
- si $\ulcorner \sigma \urcorner$ est finie alors σ est compacte: pour toute ensemble dirigée $\Delta : A$, si $\sigma \leqslant_A \bigsqcup \Delta$ alors il existe $\tau \in \Delta$ t.q. $\sigma \leqslant_A \tau$
- il existe une ensemble dirigée Δ de stratégies innocentes *compactes* t.q. $\sigma = \bigsqcup \Delta$; en deduire que $\langle A, \leqslant_A \rangle$ est un CPO ω-algebraic