Master Parisien de Recherche en Informatique
Cours 2.2

Modèle des langages de programmation
Domaines, Catégories, Jeux

Séance IV

Espace de cohérence ;

Catégories monoïdales fermées ;

Logique linéaire.

Séance précédente: la catégorie Ens comme ccc

— Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ où sont spécifiés:

- pour chaque couple d'objets A, B, un produit cartésien $A \times B$ et ses projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$,

- un objet terminal $\mathbf{1}$.

— Une catégorie cartésienne close est une catégorie cartésienne où sont spécifiés, pour chaque objet B,

- un foncteur

$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$

- une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ indexée par des objets A, B, C:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

naturelle en A, B et C.

I. Espaces de cohérence.

Espace de cohérence

Ce modèle est à l'origine de la logique linéaire (1986).

Décomposition linéaire du modèle des dI-domaines et fonctions stables.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérée:

Structures de données concrètes Berry-Curien 1985	$\Rightarrow$	Jeux Lamarche 1992
dI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables Bucciarelli-Ehrhard 1991	$\Rightarrow$	Espace d'hypercohérence Ehrhard 1993
Bidomaines Berry 1979	$\Rightarrow$	Bistructures Curien-Plotkin-Winskel 1996

Espace de cohérence

On appelle espace de cohérence un couple $A = (|A|, \smile_A)$ formé

— d'un ensemble $|A|$ appelé la trame de A

— d'une relation reflexive symétrique $\smile_A \subset |A| \times |A|$ appelée cohérence.

Espace de cohérence est une manière pédante de dire graphe.

Notation: on écrit

— $a \frown_A a'$ si $a \smile_A a'$ et $a \neq a'$.

— $a \asymp_A a'$ si $\neg(a \smile_A a')$ ou $a = a'$.

Exemple 1. les espaces de cohérence $0 = \top$ de trame vide et $1 = \perp$ de trame singleton.

Exemple 2. pour tout ensemble X, l'espace de cohérence “discret” $(X, =)$. En particulier, $B = (\{V, F\}, =)$ et $N = (\mathbb{N}, =)$.

Interaction

Une clique u dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in u, \qquad a \frown_A a'$$

Une anticlique v dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in v, \qquad a \asymp_A a'$$

Nous allons interpréter

— les types simples du λ-calcul comme des graphes,

— les programmes u de type A comme des cliques de A,

— les contre-programmes v de type A comme des anti-cliques de A,

— l'interaction entre u et v comme l'intersection $u \cap v$.

Remarque: $u \cap v$ contient au plus un élément (=le résultat!).

La négation

Soit A un espace de cohérence. On définit sa négation $A^{\perp}$ comme le graphe dual de A:

— $|A^{\perp}| = |A|$

— $a \frown_{A^{\perp}} a'$ ssi $a \asymp_A a'$.

Remarque: une anti-clique de A est une clique de $A^{\perp}$. On fait donc interagir une clique de A contre une clique de $A^{\perp}$. Dualité Joueur vs. Opposant.

Propriété fondamentale:

$$A \;=\; (A^{\perp})^{\perp}$$

La somme (plus)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la somme $A \oplus B$ comme la somme des graphes A et B

— $|A \oplus B| = |A| + |B|$

— $a \frown_{A \oplus B} a'$ ssi $a \frown_A a'$,

— $b \frown_{A \oplus B} b'$ ssi $b \frown_B b'$,

— $a \frown_{A \oplus B} b$ jamais.

exo. montrer que les graphes $A \oplus 0$ et A sont isomorphes.

Le produit (avec)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le produit $A\&B$ comme une somme “alternative” des graphes A et B.

— $|A\&B| = |A| + |B|$

— $a \frown_{A\&B} a'$ ssi $a \frown_A a'$,

— $b \frown_{A\&B} b'$ ssi $b \frown_B b'$,

— $a \frown_{A\&B} b$ toujours.

exo. montrer que

$$A\&B \;=\; (A^\perp \oplus B^\perp)^\perp$$

Tenseur

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le tenseur $A \otimes B$ comme le produit des deux graphes A et B:

— $|A \otimes B| = |A| \times |B|$

— $(a, b) \frown_{A \otimes B} (a', b')$ ssi $a \frown_A a'$ et $b \frown_B b'$.

exo. montrer que les graphes $A \otimes 1$ et A sont isomorphes.

Par

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le par-produit $A \parr B$ comme un produit "alternatif" des deux graphes A et B:

— $|A \parr B| = |A| \times |B|$

— $(a, b) \frown_{A \parr B} (a', b')$ ssi $a \frown_A a'$ ou $b \frown_B b'$.

exo. montrer que

$$A \parr B \;=\; (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$$

Distributivité

$$A \otimes (B \oplus C) \;\cong\; (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$A \parr (B \& C) \;\cong\; (A \parr B) \& (A \parr C)$$

Réminiscent de $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$ dans $\mathbf{Ens}$. Dès lors, on appellera

— additifs les connecteurs $\oplus$ et $\&$, et unités 0 et $\top$,

— multiplicatifs les connecteurs $\otimes$ et $\parr$, et unités 1 et $\perp$.

Remarque: $\cong$ signifie ici isomorphes en tant que graphes, ou bien isomorphes dans la catégorie $\mathbf{Coh}$ construite ci-après.

Flèche linéaire

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la flèche linéaire $A \multimap B$ de A et B comme

— $|A \multimap B| = |A| \times |B|$

— $(a, b) \frown_{A \multimap B} (a', b')$ ssi $\begin{cases} a \frown_A a' \text{ implique } b \frown_B b' \\ \text{et} \\ b \frown_{B^\perp} b' \text{ implique } a \frown_{A^\perp} a' \end{cases}$

exo. Montrer que

$$A \multimap B = A^\perp \parr B = (A \otimes B^\perp)^\perp$$

La catégorie $\mathbf{Coh}$

La catégorie $\mathbf{Coh}$ est définie comme la catégorie

— dont les objets sont les espaces de cohérence,

— dont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ sont les cliques de $A \multimap B$.

L'identité

$$id_A = \{(a, a) \in |A \multimap A|\}$$

La composition de $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$.

$$g \circ f = \{(a, c) \in |A \multimap C| \mid \exists b \in |B| \quad (a, b) \in f \text{ et } (b, c) \in g\}$$

exo. Vérifier que les définitions d'identité et de composition définissent une catégorie.

Exercice

exo. Montrer que la catégorie $\mathbf{Coh}$ contient la catégorie des ensembles et fonctions partielles comme sous-catégorie pleine (voir [MacLane] pour une définition de full subcategory). Pour cela, considérer l'espace de cohérence "discret" $(X, =)$ associé à un ensemble X.

Montrer que la sous-catégorie est close par $\oplus$ et $\otimes$, mais pas close par $\multimap$. Montrer que toutes les anticliques de $(X, =) \multimap (Y, =)$ sont sous-ensemble d'une ligne d'abscisse.

Damnation: Coh n'est pas cartésienne fermée!

exo. Montrer que

— $A\&B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie $\mathbf{Coh}$.

— que l'objet $\top$ est terminal dans $\mathcal{C}$.

En déduire que $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo. Montrer que seul l'objet $0 = \top$ admet une exponentiation cartésienne dans la catégorie cartésienne $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$. [Utiliser (1) l'égalité $0 = \top$, (2) que $\mathbf{Hom}(0, A)$ est singleton pour tout objet A, (3) que tout objet A exponentiable définit une bijection

$$\frac{A\&\top \longrightarrow B}{\top \longrightarrow A \Rightarrow B} \quad \phi_{\top,A,B}$$

pour démontrer que $\mathbf{Hom}(A, B)$ est singleton, pour tout objet B.] En déduire que la catégorie $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ n'est pas cartésienne fermée.

Mais presque...

exo. Utiliser l'associativité et la définition de $⅋$ pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = B \multimap (A \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout espace de cohérence A une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ dans $\mathbf{Coh}$:

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \quad \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en B et C.

Verdict:

— la structure cartésienne est donnée par les additifs $\&$ et $\top$,

— la structure fermée est donnée par les multiplicatifs $\otimes$ et $\mathbf{1}$.

Prescription:

— il faut une exponentielle pour relier les mondes additifs et multiplicatifs.

II. La structure de $\mathbf{Coh}$

Catégories symétriques monoïdales fermées.

Intuition

Tout refaire comme dans les catégories cartésiennes fermées mais en remplaçant le produit cartésien $\times$ par un bifoncteur $\otimes$ arbitraire.

Remplacer la propriétés universelle de $\times$ par une série de diagrammes de cohérence sur $\otimes$.

On obtient une catégorie symétrique monoïdale.

Puis remplacer l'adjonction $\dfrac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C}$ par une adjonction $\dfrac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C}$.

On obtient ainsi une catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc) où on interpréte la logique linéaire multiplicative intuitionniste (=λ-calcul linéaire.)

Catégorie monoïdale

Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

associatif "modulo" un isomorphisme naturel

$$\alpha : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

munie d'un objet 1, unité de $\otimes$ "modulo" un isomorphisme naturel

$$\lambda : 1 \otimes A \longrightarrow A \qquad\qquad \rho : A \otimes 1 \longrightarrow A$$

Ces morphismes doivent faire commuter le "pentagone de MacLane"

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha\otimes D"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (1 \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\lambda"'] & (A \otimes 1) \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes B"] \\
A \otimes B \arrow[r, equal] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Symétrie

Une symétrie dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ consiste en une famille d'isomorphismes

$$\gamma_{A,B} \ : \quad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et B, qui vérifie l'égalité:

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B \quad = \quad A \otimes B \xrightarrow{id_{A\otimes B}} A \otimes B$$

et fait commuter les diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes 1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho"'] & 1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\gamma"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\gamma\otimes B"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Exemples de catégories monoidales

Sans symétrie:

— La catégorie des tresses,

— Nous le verrons bientôt: La catégorie $End(\mathcal{C})$ des endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$. Les foncteurs $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont ses objets, les transformations naturelles $F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ sont ses morphismes, et la composition de foncteur son produit tensoriel.

Avec symétrie:

— La catégorie des permutations,

— Toute catégorie cartésienne, avec le produit cartésien pour tenseur, et l'objet terminal pour unité,

— La catégorie duale d'une catégorie monoïdale symétrique,

— La catégorie $\mathbf{Coh}$ avec tenseur $\otimes$ et unité 1.

exo. Démontrer que les exemples forment bien des catégorie monoïdales, avec symétrie dans les trois derniers cas.

Le pourquoi des diagrammes de cohérence

$\boxed{\text{“Every diagram commutes”}}$

Effet Canada Dry: Retrouver une conséquence de la propriété universelle... sans la propriété universelle.

Intuitivement: soit $A_1, ..., A_p$ une liste de p objets dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Un mot w sur $(A_1, ..., A_p)$ est un objet de la forme:

— 1 lorsque $p = 0$,

— $u \otimes v$ où u est un mot sur $(A_1, ..., A_m)$, et v est un mot sur $(A_{m+1}, ..., A_p)$, pour un certain $1 \leq m \leq p$.

Parmi les mots sur $(A_1, ..., A_p)$, le mot canonique $(\cdots (A_1 \otimes A_2) \otimes \cdots A_p)$.

Théorème de cohérence: il n'existe qu'un seul morphisme structural “α, λ, ρ” d'un mot sur $(A_1, ..., A_p)$ au mot canonique sur $(A_1, ..., A_p)$.

En fait: –1– un seul isomorphisme naturel canonique entre des foncteurs mots $\mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}$. –2– Ou bien: toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une catégorie monoïdale symétrique stricte. –3– Ou bien, la catégorie monoïdale symétrique est la catégorie des permutations. Voir chapitres VII.2 et IX dans MacLane.

Exponentiation monoïdale

Soit A un objet dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle exponentiation monoïdale de A le couple formé par un foncteur

$$(A \multimap -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections indexée par des objets B, C de $\mathcal{C}$:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \multimap C)$$

naturelle en B et C.

Catégorie symétrique monoïdale fermée

Une catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc) est une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation monoïdale

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{1}$$

pour tout objet A.

Par le théorème du paramètre, $\multimap$ définit un bifoncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

On définit le morphisme $eval_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B$ de la manière suivante:

$$\frac{A \multimap B \xrightarrow{id} A \multimap B}{A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B} \quad \phi^{-1}_{A \multimap B, A, B}$$

exo. Montrer que toute catégorie cartésienne fermée est une catégorie symétrique monoïdale fermée.

Logique linéaire multiplicative intuitionniste

$$A, B ::= \mathbf{1} \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid \alpha$$

Axiome $\dfrac{}{A \vdash A}$

$\multimap$ gauche $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$ $\multimap$ droit $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$

$\otimes$ gauche $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$ $\otimes$ droit $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$

1 gauche $\dfrac{\Gamma, 1 \vdash A}{\Gamma \vdash A}$ 1 droit $\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}$

Coupure $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$

Permutation $\dfrac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$

Interprétation de la logique

Axiome: $A \xrightarrow{id_A} A$

$\multimap$ gauche: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes f \otimes A \multimap B} \Gamma \otimes A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes eval_{A,B}} \Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$$

$\multimap$ droit: $\Gamma \otimes A \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{\Gamma,A,B}(f)} A \multimap B$.

$\otimes$ gauche: $\Gamma \otimes A \otimes B \xrightarrow{f} C$ reste tel qu'en lui-même.

$\otimes$ droit: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} B$ deviennent $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$

Interprétation de la logique (suite)

Coupure: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes f} \Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$$

Permutation: $\Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes \gamma_{A_2,A_1} \otimes \Delta} \Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$$

Remarque: pour simplifier, la catégorie est supposée stricte. c'est-à-dire que α, λ et ρ sont toutes des identités.

III. La structure catégorique de $\mathbf{Coh}$ (suite)

Dualité et catégories $*$-autonomes.

Catégorie $*$-autonome

Tout couple d'objets $A, \perp$ dans une catégorie symétrique monoïdale fermée $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, définit un morphisme identité

$$id_{A \multimap \perp} : A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp$$

que la bijection $\phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en le morphisme

$$eval_{A,\perp} : A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp$$

qui devient en précomposant avec la symétrie:

$$(A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp$$

que la bijection $\phi_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en un morphisme:

$$A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$$

Un objet $\perp$ est dualisant lorsque le morphisme canonique $A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est un isomorphisme, pour tout objet A.

Une catégorie symétrique monoïdale fermée avec un objet dualisant est appelé catégorie $*$-autonome.

La catégorie Coh est $*$-autonome

$\perp = 1^{\perp}$ est l'espace de cohérence avec la trame singleton $|\perp| = \{*\}$.

$$
\begin{array}{lll}
e = id_{A \multimap \perp} & A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp & \{((a,*),(a,*)) \mid a \in |A|\} \\
f = \phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}(e) & A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp & \{((a,(a,*)),*) \mid a \in |A|\} \\
g = f \circ \gamma_{A, A \multimap \perp} & (A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp & \{(((a,*),a),*) \mid a \in |A|\} \\
h = \phi_{A \multimap \perp, A, \perp}(g) & A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp & \{(a,((a,*),*)) \mid a \in |A|\}
\end{array}
$$

Le morphisme h est un isomorphisme, d'inverse la clique

$$h^{-1} = \{(((a,*),*),a) \mid a \in |A|\}$$

Logique linéaire multiplicative (MLL)

$$A, B ::= A \otimes B \mid \mathbf{1} \mid A ⅋ B \mid \bot \mid \alpha$$

Axiome	$\dfrac{}{A \vdash A}$
$\otimes$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$
⅋	$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}$
1	$\dfrac{}{\vdash 1}$
$\bot$	$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}$

La logique MLL s'interprète dans toute catégorie $*$-autonome.

Logique linéaire multiplicative additive (MALL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A ⅋ B \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MLL+

$\oplus$ gauche	$\dfrac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\oplus$ droit	$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\&$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$
0	pas de règle
$\top$	$\dfrac{}{\vdash \Gamma, \top}$

La logique MALL s'interprète dans toute catégorie à la fois cartésienne et $*$-autonome.

IV. La structure de $\mathbf{Coh}$ (fin)

Exponentielles.

Le nouvel ingrédient: l'exponentielle

On définit l'exponentielle $!A$ d'un espace de cohérence A comme le graphe

— dont la trame $|!A|$ est l'ensemble des cliques finies de A,

— $u \frown_{!A} v$ ssi l'union $u \cup v$ est une clique finie de A.

exo. Montrer que $!A$ définit un dI-domaine dont $|!A|$ est l'ensemble des éléments compacts, ordonnés par inclusion entre cliques finies.

L'espace de cohérence $?A$ est défini par:

$$?A = (!A^{\perp})^{\perp}$$

L’alchimie exponentielle

Le rôle de l’exponentielle est de transmuter les additifs en multiplicatifs!

Le nom “exponentielle” est justifié par les isomorphismes suivants:

$$!(A \& B) \;\cong\; !A \otimes !B \qquad\qquad !\top \;\cong\; 1$$

Réminiscent de $\wp(A + B) \cong \wp(A) \times \wp(B)$ dans $\mathbf{Ens}$.

Nous étudierons plus loin les propriétés catégoriques de l’exponentielle !. En particulier,

— chaque $!A$ définit un comonoïde $(!A, d_A, e_A)$ dans $\mathbf{Coh}$,

— l’exponentielle définit une comonade $(!, \delta, \epsilon)$ dans $\mathbf{Coh}$,

— la diagonale cartésienne $A \longrightarrow A \& A$ est transportée sur la diagonale comonoidale $!A \longrightarrow !A \otimes !A$.

exo. Montrer que les égalités $A \otimes (B \& C) \;\cong\; (A \otimes B) \& (A \otimes C)$ et $!(A \oplus B) \;\cong\; !A \parr !B$ sont fausses. Début d’un tableau de Mendeleiev! Effets des polarités, très importants par la suite.

Logique linéaire (LL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid !A \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A \parr B \mid ?A \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MALL+

contraction $$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

affaiblissement $$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$$

déréliction $$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

renforcement $$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}$$

Monoïde

Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un monoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xrightarrow{u} A \xleftarrow{m} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes m"'] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m\otimes A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rrr, "m"] & & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[r, "u\otimes A"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes 1 \arrow[l, "A\otimes u"'] \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Exemple: un monoïde dans $(\mathbf{Ens}, \times, 1)$.

Comonoïde

Dualement: Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un comonoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xleftarrow{e} A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d"] \arrow[d, "d"'] & & A \otimes A \arrow[d, "d \otimes A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "A \otimes d"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes A) \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[l, "e \otimes A"'] \arrow[r, "A \otimes \eta"] & A \otimes 1 \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "d"] \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Comonoïde co-commutatif

Un comonoïde (A, d, e) dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \gamma)$ est dit co-commutatif lorsque

$$A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{\gamma_{A,A}} A \otimes A \quad = \quad A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

Un comonoïde dans $\mathbf{Coh}$: chaque objet $!A$

L'espace de cohérence $!A$ est un comonoïde co-commutatif dans $\mathbf{Coh}$, lorsqu'on l'équipe des cliques suivantes:

— Un morphisme diagonal ou co-multiplication

$$!A \xrightarrow{d_A} !A \otimes !A$$

défini par

$$\{(u,(v,w)) \in |!A \multimap !A \otimes !A| \mid u = v \cup w\}$$

— Un morphisme d'affaiblissement ou co-unité

$$!A \xrightarrow{e_A} 1$$

défini par le singleton

$$\{(\varnothing, *)\}$$

Prochaine séance

— Interprétation de LL dans Coh,

— construction de la catégorie de Kleisli d'une comonade.

En avant goût... dans la trame de $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.fx \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b)\}, a, b)$

$$\lambda f :!(A \longrightarrow A).\lambda x : A.x \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\emptyset, a, a)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.f(fx) \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b), (b, c)\}, a, c)$