Modèles des langages de programmation

Domaines, catégories, jeux

Programme de cette première séance:

Modèle ensembliste du lambda-calcul ;

Catégories cartésiennes fermées

Plan de la séance

1— le λ-calcul simplement typé,

2— le modèle ensembliste du λ-calcul simplement typé,

3— la structure catégorique de Ens: catégories et foncteurs,

4— la structure catégorique de Ens: transformations naturelles et adjonctions,

5— la structure catégorique de Ens: ccc,

6— interprétation du λ-calcul simplement typé dans une ccc,

7— exemples de cccs.

I. Le λ-calcul simplement typé

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Il est possible de typer certaines expressions du λ-calcul au moyen de types simples A, B construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle contexte de typage Γ une suite finie $\Gamma = (x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)$ où x_i est une variable et A_i est un type simple, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On appelle séquent un triplet:

$$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash P : B$$

où $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$ est un contexte de typage, P est un λ-terme et B est un type simple.

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Variable
$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application
$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement
$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction
$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation
$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un λ-terme P est appelé simplement typé lorsqu'il existe un contexte de typage Γ et un type simple A tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des λ-termes simplement typés est clos par β-réduction:

Subject Reduction: Si $\Gamma \vdash P : A$ et $P \longrightarrow_{\beta} Q$, alors $\Gamma \vdash Q : A$.

Un λ-terme P est appelé fortement normalisable lorsque tous les chemins de β-réduction:

$$P \longrightarrow_{\beta} P_1 \longrightarrow_{\beta} P_2 \longrightarrow_{\beta} \cdots \longrightarrow_{\beta} P_n \longrightarrow_{\beta} \cdots$$

terminent.

Normalisation forte: Si P est simplement typé alors P est fortement normalisable.

En particulier, le λ-terme $\Delta\Delta$ qui boucle n'est pas simplement typé.

Curry-Howard (1)

Logique minimale intuitioniste

Variable

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, \quad A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, \quad A \vdash B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, \quad A, \quad A \vdash B}{\Gamma, \quad A \vdash B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, \quad A, \quad B, \Delta \vdash C}{\Gamma, \quad B, \quad A, \Delta \vdash C}$$

Curry-Howard (1)

λ-calcul simplement typé

Variable

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Isomorphisme de Curry-Howard (2)

$\boxed{\lambda\text{-calcul simplement typé} \simeq \text{logique minimale intuitioniste}}$

Une remarque qui pourrait n'avoir qu'une portée mineure... pourtant:

Logique constructive: L'assistant de démonstration CoQ développé à l'INRIA est basé sur un langage de type extrêmement raffiné, avec des types polymorphes et dépendants. Permet de certificier une démonstration et d'en extraire un programme OCaml.

Logique classique: La logique classique est aussi constructive! à condition d'ajouter un opérateur de contrôle `call-cc` à la syntaxe du λ-calcul. L'opérateur permet de mettre en mémoire l'environnement du λ-terme (= la pile, la continuation) et d'y revenir plus tard dans l'évaluation.

Théorie des ensembles: Jean-Louis Krivine (PPS) interprète tous les axiomes de la théorie des ensembles (sauf l'axiome du choix) dans un modèle de réalisabilité fondé sur le λ-calcul avec contrôle.

Encore, et encore, et encore...

II. L'interprétation ensembliste du λ-calcul

Interprétation ensembliste

On associe un ensemble X_α à chaque type atomique α.
Ensuite, on étend l'interprétation à tous les types:

$$[\![\alpha]\!] = X_\alpha \qquad [\![A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \;=\; \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ens}}([\![A]\!], [\![B]\!])$$

Un séquent	$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \;\vdash\; M : B$
est interprété comme une fonction	$[\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$

Propriété remarquable: “soundness” pour les règles β et η

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \;=\; [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

III. La structure catégorique des ensembles

Catégories et foncteurs

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'une classe d'objets,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de morphismes pour tout couple d'objets (A, B),

— d'une loi de composition $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme identité $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D), \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B), \qquad f \circ id_A \; = \; f \; = \; id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Exemples

1. La catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles et fonctions.

2. Tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ définit une catégorie par:

$$x \longrightarrow y \text{ ssi } x \leq y.$$

3. La catégorie des domaines et fonctions continues,

4. La catégorie dont les objets sont les jeux alternés A où Opposant commence, et les flèches les stratégies séquentielles de $A \multimap B$,

5. Un grand nombre d'autres exemples en sémantique.

Catégorie duale

Prendre une catégorie $\mathcal{C}$, et changer la direction de toutes les flèches: voilà définie la catégorie duale $\mathcal{C}^{op}$.

Catégorie produit

Le produit de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

— dont les objets sont les couples (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

— dont les morphismes $(A, B) \longrightarrow (A', B')$ sont les couples de morphismes (f, g)

$$f : A \longrightarrow A' \qquad\qquad g : B \longrightarrow B'$$

avec composition et identités définis de la manière attendue:

$$(A, B) \xrightarrow{id_{(A,B)}} (A, B) \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(id_A, id_B)} (A, B)$$

$$(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \xrightarrow{(f',g')} (A'', B'') \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(f' \circ f, g' \circ g)} (A'', B'')$$

Foncteur

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée:

— d'un objet FA de $\mathcal{D}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \qquad = \qquad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \qquad = \qquad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Un monoïde $(M, \cdot, e)$ est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

Associativité	$\forall x, y, z \in M,$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Unité	$\forall x \in M,$	$x \cdot e = x = e \cdot x.$

Un homomorphisme f de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ est une fonction $f : M \longrightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

exo. Identifier tout monoïde $(M, \cdot, e)$ à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

La catégorie $\mathbf{Mon}$ a pour objets les monoïdes et pour flèches les homomorphismes entre monoïdes.

On définit un foncteur

$$U : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

qu'on appelle foncteur d'oubli, comme suit:

- à chaque monoïde $(M, \cdot, e)$ on associe son support $U(M, \cdot, e) = M$,
- à chaque homomorphisme f de $(M, \cdot, e)$ vers $(N, \bullet, u)$, on associe la fonction sous-jacente $f : M \longrightarrow N$.

exo. Montrer que U définit un foncteur.

Isomorphisme

Supposons donnée une catégorie $\mathcal{C}$.

Un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

est appelé isomorphisme lorsqu'il existe un morphisme

$$g : B \longrightarrow A$$

vérifiant

$$g \circ f = id_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = id_B.$$

exo. Montrer que $f ; g : A \longrightarrow C$ est un isomorphisme lorsque $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont des isomorphismes.

exo. Montrer que tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ transporte les isomorphismes de $\mathcal{C}$ en isomorphismes de $\mathcal{D}$.

Bifoncteur

Un bifoncteur F de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vers une catégorie $\mathcal{E}$ est la donnée:

— d'un foncteur $F(A,-)$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'un foncteur $F(-,B)$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ pour tout objet B de $\mathcal{D}$,

tels que pour tous morphismes $f : A \longrightarrow A'$ de $\mathcal{C}$ et $g : B \longrightarrow B'$ de $\mathcal{D}$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "F(A,g)"] \arrow[d, "F(f,B)"'] & F(A,B') \arrow[d, "F(f,B')"] \\ F(A',B) \arrow[r, "F(A',g)"] & F(A',B') \end{tikzcd} \tag{1}$$

commute.

Notation: $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$,

Remarque. Le diagramme (1) permet d'écrire $F(f,g) : A \times B \longrightarrow A' \times B'$.

exo. Montrer que bifoncteur de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ et foncteur de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ sont deux notions équivalentes. Ce qui justifie la notation.

IV. La structure catégorique des ensembles

Transformations naturelles et adjonctions

Transformations naturelles

Soient deux foncteurs $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Une transformation naturelle

$$\theta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$$

est une famille

$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in Obj(\mathcal{A})}$$

de morphismes de $\mathcal{B}$ indexée par les objets de $\mathcal{A}$, telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ B & FB \arrow[r, "\theta_B"] & GB \end{tikzcd}$$

commute.

Adjonction

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories.

Une adjonction est un triplet (L, R, ϕ) où L et R sont deux foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets A dans $\mathcal{A}$ et B dans $\mathcal{B}$,

$$\phi_{A,B} : \mathbf{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B) \;\cong\; \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RB)$$

naturelle en A et B. On écrit aussi:

$$\frac{LA \xrightarrow{\mathcal{B}} B}{A \xrightarrow{\mathcal{A}} RB} \quad \phi_{A,B}$$

Dans ce cas, on dit que L est adjoint à gauche de R, et on écrit $L \dashv R$.

Exemple: $\mathcal{A}$ est la catégorie des ensembles, et $\mathcal{B}$ est la catégorie des k-espaces vectoriels, pour k un corps. R est le foncteur d'oubli, et L le foncteur qui à un ensemble A associe le k-espace vectoriel $L(A)$ de base A.

La bijection ϕ est naturelle signifie ici...

Naturelle en A et B signifie que la famille de bijections $\phi_{A,B}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} LA \arrow[r, "g"] & B \arrow[d, "h_B"] \\ LA' \arrow[u, "Lh_A"] \arrow[r, "f"'] & RB' \end{tikzcd}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_{A,B}(g)"] & RB \arrow[d, "Rh_B"] \\ A' \arrow[u, "h_A"] \arrow[r, "\phi_{A',B'}(f)"'] & RB' \end{tikzcd}$$

Adjonction (présentation alternative)

De manière équivalente:

Une adjonction est un quadruplet (L, R, η, ϵ) où L et R sont des foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et η et ϵ des transformations naturelles:

$$\eta : Id_{\mathcal{A}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} RL \qquad \epsilon : LR \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{B}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de L et R respectivement).

$$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\epsilon} R \qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\epsilon F} L$$

On dessine cette situation de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend left, "Id_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{B} \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathcal{B}}"'] \arrow[phantom, u, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[phantom, d, "\Downarrow\epsilon"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

exo: montrer l'équivalence entre les deux notions d'adjonction.

V. La structure catégorique des ensembles

Catégories cartésiennes fermées

Produits

Le produit de deux objets A et B dans une catégorie $\mathcal{C}$, est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & & A \\ X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & A \\ X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] \arrow[r, "h"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

exo. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près. (Cela est vrai plus généralement de toute définition universelle: limite, colimite, etc...)

Exemples de produits

1. Le produit cartésien dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,
2. La borne inférieure dans un ensemble ordonné $(X, \preceq)$,
3. Le produit $A\&B$ de deux jeux alternés, dans la catégorie de jeux sus-mentionnée.

Objet terminal

Un objet $\mathbf{1}$ est terminal dans la catégorie $\mathcal{C}$ lorsque $\mathbf{Hom}(A, \mathbf{1})$ est singleton, pour tout objet A.

On peut considérer que $\mathbf{1}$ est le produit "vide"de $\mathcal{C}$.

Exemple 1. Le singleton $\{*\}$ dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,

Exemple 2. Le maximum dans un ensemble ordonné $(X, \preceq)$

Exemple 3. Le jeu $\perp$ avec $M_\perp = \varnothing$ dans les jeux alternés où Opposant commence.

exo. Montrer que dans une catégorie qui contient un objet terminal $\mathbf{1}$, tout objet est produit de $\mathbf{1}$ et de lui-même.

Catégorie cartésienne

Une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$ est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée d'un produit $A \times B$ pour tout couple d'objets, et d'un objet terminal $\mathbf{1}$.

Dans toute catégorie cartésienne,

— effacement $\epsilon_A : A \longrightarrow \mathbf{1}$,

— diagonale $\delta_A : A \longrightarrow A \times A$ obtenue par

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[urr, bend left, "id_A"] \arrow[drr, bend right, "id_A"'] & A \times A \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

— symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \longrightarrow B \times A$ obtenue par

$$\begin{tikzcd}
 & & B \\
A \times B \arrow[r, "\gamma_{A,B}"] \arrow[urr, bend left, "\pi_2"] \arrow[drr, bend right, "\pi_1"'] & B \times A \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

exo. Montrer que $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ unique.

Catégories cartésienne fermée

Première définition

Exponentiation cartésienne

Soit A un objet dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle exponentiation cartésienne de A le couple formé par un foncteur

$$(A \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

naturelle en B et C.

Autrement dit, une adjonction entre les foncteurs:

$$A \times - \quad \dashv \quad A \Rightarrow -$$

Bijection naturelle signifie ici

Naturelle en B et C signifie ici que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ transforme tout diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "g"] & C \arrow[d, "h_C"] \\
A \times B' \arrow[u, "A \times h_B"] \arrow[r, "f"'] & C'
\end{tikzcd}
$$

en un diagramme commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\phi_{A,B,C}(g)"] & A \Rightarrow C \arrow[d, "A \Rightarrow h_C"] \\
B' \arrow[u, "h_B"] \arrow[r, "\phi_{A,B',C'}(f)"'] & A \Rightarrow C'
\end{tikzcd}
$$

Ccc

Une catégorie cartésienne close (ccc) est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation cartésienne

$$\frac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{2}$$

pour tout objet A.

Théorème du paramètre

Nous avons vu que le produit $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. De même:

Théorème du paramètre [MacLane]

La famille d'exponentiations $(A \Rightarrow -)_A$ définit un unique bifoncteur

$$(- \Rightarrow -) \;:\; \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que les bijections $\phi_{A,B,C}$ soient naturelles en A, B et C.

Naturelle en A, B et C signifie que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "g"] & C \arrow[d, "h_C"] \\
A' \times B' \arrow[u, "h_A \times h_B"] \arrow[r, "f"'] & C'
\end{tikzcd}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\phi_{A,B,C}(g)"] & A \Rightarrow C \arrow[d, "h_A \Rightarrow h_C"] \\
B' \arrow[u, "h_B"] \arrow[r, "\phi_{A',B',C'}(f)"'] & A' \Rightarrow C'
\end{tikzcd}$$

Catégories cartésienne fermée

Deuxième définition

Ccc

Une catégorie cartésienne fermée est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ et la donnée pour tout objet A et B:

— d'un objet $A \Rightarrow B$ appelé espace fonctionnel de A vers B,

— d'un morphisme $eval_{A,B} : A \times (A \Rightarrow B) \longrightarrow B$ appelé morphisme d'évaluation,

vérifiant que pour tout objet X et morphisme $f : A \times X \longrightarrow B$, il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \Rightarrow B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, "eval_{A,B}"] & B \\
A \times X \arrow[u, "A \times h"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

VI. Interprétation du λ-calcul dans une CCC

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Variable	$\dfrac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\dfrac{x : A, \Gamma \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$
Application	$\dfrac{\Gamma \vdash Q : A \qquad \Delta \vdash P : A \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\dfrac{\Gamma \vdash P : B}{x : A, \Gamma \vdash P : B}$
Contraction	$\dfrac{x : A, y : A, \Gamma \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\dfrac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

Interprétation du λ-calcul

Variable: $A \xrightarrow{id_A} A$

Lambda: $A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{A,\Gamma,B}(f)} A \Rightarrow B$

Application: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} A \Rightarrow B$ deviennent

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times g} A \times (A \Rightarrow B) \xrightarrow{eval_{A,B}} B$$

Contraction: $A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\delta_A \times \Gamma} A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$

Affaiblissement: $\Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\epsilon_A \times \Gamma} 1 \times \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma \xrightarrow{f} B$

Permutation: $\Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \times B \times A \times \Delta \xrightarrow{\Gamma \times \gamma_{A,B} \times \Delta} \Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$$

Théorème de validité

Théorème ("soundness"):

L'interprétation du λ-calcul simplement typée est correcte dans toute ccc.

Autrement dit, si $\mathcal{C}$ est une ccc et $[\![-]\!]$ est son crochet d'interprétation,

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \quad = \quad [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \quad = \quad [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

exo. Démontrer le théorème ci-dessus.

VII. Exemples de CCC — et linéarisation

Pourquoi introduire les cccs?

Disons que pour les ensembles et fonctions, c'était assez facile.

Mais, il est parfois difficile de savoir si une interprétation donne véritablement un modèle.

Exemples:

— domaines de Scott et fonctions continues,

— domaines de Berry et fonctions stables,

— structures de données concrètes, et algorithmes séquentiels (Berry+Curien),

— jeux alternés où Opposant commence, et stratégies séquentielles.

Aussi: permet ensuite d'analyser la logique par la voie catégorique!

Catégories symétriques monoïdales closes, comonades, construction de Kleisli...

Linéarisation

A l'origine de la logique linéaire (1986)...

La décomposition linéaire du modèle des fonctions stables de Berry.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérées:

dI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables Bucciarelli-Ehrhard 1991	$\Rightarrow$	Espace d'hypercohérence Ehrhard 1993
Bidomaines Berry 1979	$\Rightarrow$	Bistructures Curien-Plotkin-Winskel 1996
Structures de données concrètes Berry-Curien 1985	$\Rightarrow$	Jeux Lamarche 1992

Bibliographie sommaire

J-Y. Girard. Advances in LL, Cambridge University Press, 1995.
Linear Logic: its syntax and its semantics.
Plus qu'une introduction à la logique linéaire.

S. Abramsky and G. McCusker. Computational Logic, Springer 1999.
Game Semantics.
Présentation pédagogique des différentes classes de stratégie
sur les jeux à arène, et les théorèmes de "full abstraction".

P-A. Melliès. A paraître dans Panoramas et Synthèses (SMF).
Categorical semantics of linear logic: a survey
http://www.pps.jussieu.fr/∼mellies/papers.html/
Introduction aux catégories monoidales et à la sémantique des preuves

S. MacLane. Springer Verlag, 1971.
Categories for the working mathematician.
Surtout pour les chapitres IV, VI et VII.