

Master Parisien de Recherche en Informatique

Cours 2.2

Modèle des langages de programmation

Domaines, Catégories, Jeux

Séance II

Espace de cohérence ;
Catégories monoïdales fermées ;
Logique linéaire.

Séance précédente: la catégorie **Ens** comme **ccc**

— Une catégorie **cartésienne** est une catégorie \mathcal{C} où sont spécifiés:

- pour chaque couple d'objets A, B , un produit cartésien $A \times B$ et ses projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$,
- un objet terminal **1**.

— Une catégorie **cartésienne close** est une catégorie cartésienne où sont spécifiés, pour chaque objet B ,

- un foncteur

$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$

- une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ indexée par des objets A, B, C :

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

naturelle en A, B et C .

I. Espaces de cohérence.

Espace de cohérence

Ce modèle est à l'origine de la logique linéaire (1986).

Décomposition linéaire du modèle des dl-domaines et fonctions stables.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérées:

Structures
de données concrètes
Berry-Curien 1985

⇒

Jeux
Lamarche 1992

dl-domaines avec cohérence
et fonctions fortement stables
Bucciarelli-Ehrhard 1991

⇒

Espace
d'hypercohérence
Ehrhard 1993

Bidomaines
Berry 1979

⇒

Bistructures
Curien-Plotkin-Winskel 1996

Espace de cohérence

On appelle **espace de cohérence** un couple $A = (|A|, \subset_A)$ formé

- d'un ensemble $|A|$ appelé la **trame** de A
- d'une relation reflexive symétrique $\subset_A \subset |A| \times |A|$ appelée **cohérence**.

Espace de cohérence est une manière pédante de dire **graphe**.

Notation: on écrit

- $a \frown_A a'$ si $a \subset_A a'$ et $a \neq a'$.
- $a \smile_A a'$ si $\neg(a \subset_A a')$ ou $a = a'$.

Exemple 1. les espaces de cohérence $0 = \top$ de trame vide et $1 = \perp$ de trame singleton.

Exemple 2. pour tout ensemble X , l'espace de cohérence "discret" $(X, =)$. En particulier, $B = (\{V, F\}, =)$ et $N = (\mathbb{N}, =)$.

Interaction

Une **clique** u dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in u, \quad a \subset_A a'$$

Une **anticlique** v dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in v, \quad a \succ_A a'$$

Nous allons interpréter

- les types simples du λ -calcul comme des graphes,
- les programmes u de type A comme des cliques de A ,
- les contre-programmes v de type A comme des anti-cliques de A ,
- l'interaction entre u et v comme l'intersection $u \cap v$.

Remarque: $u \cap v$ contient au plus un élément (=le résultat!).

La négation

Soit A un espace de cohérence. On définit sa négation A^\perp comme le graphe dual de A :

$$— |A^\perp| = |A|$$

$$— a \subset_{A^\perp} a' \text{ ssi } a \succ_A a'.$$

Remarque: une anti-clique de A est une clique de A^\perp . On fait donc interagir une clique de A contre une clique de A^\perp . Dualité Joueur vs. Opposant.

Propriété fondamentale:

$$A = (A^\perp)^\perp$$

La somme (plus)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la somme $A \oplus B$ comme la somme des graphes A et B

$$- |A \oplus B| = |A| + |B|$$

$$- a \subset_{A \oplus B} a' \text{ ssi } a \subset_A a',$$

$$- b \subset_{A \oplus B} b' \text{ ssi } b \subset_B b',$$

$$- a \subset_{A \oplus B} b \text{ jamais.}$$

exo. montrer que les graphes $A \oplus 0$ et A sont isomorphes.

Le produit (avec)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le produit $A\&B$ comme une somme “alternative” des graphes A et B .

$$- |A\&B| = |A| + |B|$$

$$- a \subset_{A\&B} a' \text{ ssi } a \subset_A a',$$

$$- b \subset_{A\&B} b' \text{ ssi } b \subset_B b',$$

$$- a \subset_{A\&B} b \text{ toujours.}$$

exo. montrer que

$$A\&B = (A^\perp \oplus B^\perp)^\perp$$

Tenseur

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit **le tenseur** $A \otimes B$ comme le produit des deux graphes A et B :

$$— |A \otimes B| = |A| \times |B|$$

$$— (a, b) \subset_{A \otimes B} (a', b') \text{ ssi } a \subset_A a' \text{ et } b \subset_B b'.$$

exo. montrer que les graphes $A \otimes 1$ et A sont isomorphes.

Par

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le par-produit $A \wp B$ comme un produit “alternatif” des deux graphes A et B :

$$— |A \wp B| = |A| \times |B|$$

$$— (a, b) \frown_{A \wp B} (a', b') \text{ ssi } a \frown_A a' \text{ ou } b \frown_B b'.$$

exo. montrer que

$$A \wp B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$$

Distributivité

$$A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$A \wp (B \& C) \cong (A \wp B) \& (A \wp C)$$

Réminiscent de $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$ dans \mathbf{Ens} . Dès lors, on appellera

- **additifs** les connecteurs \oplus et $\&$, et unités 0 et \top ,
- **multiplicatifs** les connecteurs \otimes et \wp , et unités 1 et \perp .

Remarque: \cong signifie ici isomorphes en tant que graphes, ou bien isomorphes dans la catégorie \mathbf{Coh} construite ci-après.

Flèche linéaire

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la flèche linéaire $A \dashv\circ B$ de A et B comme

$$- |A \dashv\circ B| = |A| \times |B|$$

$$- (a, b) \subset_{A \dashv\circ B} (a', b') \text{ ssi } \begin{cases} a \subset_A a' \text{ implique } b \subset_B b' \\ \text{et} \\ b \subset_{B^\perp} b' \text{ implique } a \subset_{A^\perp} a' \end{cases}$$

exo. Montrer que

$$A \dashv\circ B = A^\perp \otimes B = (A \otimes B^\perp)^\perp$$

La catégorie Coh

La catégorie Coh est définie comme la catégorie

— dont les objets sont les espaces de cohérence,

— dont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ sont les cliques de $A \multimap B$.

L'identité

$$id_A = \{(a, a) \in |A \multimap A|\}$$

La composition de $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$.

$$g \circ f = \{(a, c) \in |A \multimap C| \mid \exists b \in |B| \ (a, b) \in f \text{ et } (b, c) \in g\}$$

exo. Vérifier que les définitions d'identité et de composition définissent une catégorie.

Exercice

exo. Montrer que la catégorie \mathbf{CoH} contient la catégorie des ensembles et fonctions partielles comme sous-catégorie pleine (voir [MacLane] pour une définition de **full subcategory**). Pour cela, considérer l'espace de cohérence "discret" $(X, =)$ associé à un ensemble X .

Montrer que la sous-catégorie est close par \oplus et \otimes , mais pas close par $-\circ$. Montrer que toutes les anticliques de $(X, =) -\circ (Y, =)$ sont sous-ensemble d'une ligne d'abscisse.

Damnation: Coh n'est pas cartésienne fermée!

exo. Montrer que

- $A \& B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie \mathbf{Coh} .
- que l'objet \top est terminal dans \mathcal{C} .

En déduire que $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo. Montrer que seul l'objet $0 = \top$ admet une exponentiation cartésienne dans la catégorie cartésienne $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$. [Utiliser (1) l'égalité $0 = \top$, (2) que $\mathbf{Hom}(0, A)$ est singleton pour tout objet A , (3) que tout objet A exponentiable définit une bijection

$$\frac{A \& \top \longrightarrow B}{\top \longrightarrow A \Rightarrow B} \quad \phi_{\top, A, B}$$

pour démontrer que $\mathbf{Hom}(A, B)$ est singleton, pour tout objet B .] En déduire que la catégorie $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ n'est pas cartésienne fermée.

Mais presque...

exo. Utiliser l'associativité et la définition de \curlywedge pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = B \multimap (A \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout espace de cohérence A une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ dans Coh :

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en B et C .

Verdict:

- la structure **cartésienne** est donnée par les **additifs** $\&$ et \top ,
- la structure **fermée** est donnée par les **multiplicatifs** \otimes et $\mathbf{1}$.

Prescription:

- il faut une **exponentielle** pour relier les mondes additifs et multiplicatifs.

II. La structure de Coh

Catégories symétriques monoïdales.

Intuition

Tout refaire comme dans les catégories cartésiennes fermées mais en remplaçant le produit cartésien \times par un bifoncteur \otimes arbitraire.

Remplacer la propriétés universelle de \times par une série de diagrammes de **cohérence** sur \otimes .

On obtient une **catégorie symétrique monoïdale**.

Puis remplacer l'adjonction $\frac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C}$ par une adjonction $\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C}$.

On obtient ainsi une **catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc)** où on interprète la logique linéaire multiplicative intuitionniste (=λ-calcul linéaire.)

Catégorie monoïdale

Une **catégorie monoïdale** $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie \mathcal{C} munie d'un bifoncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

associatif “modulo” un isomorphisme naturel

$$\alpha : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

munie d'un objet 1, unité de \otimes “modulo” un isomorphisme naturel

$$\lambda : 1 \otimes A \longrightarrow A \qquad \rho : A \otimes 1 \longrightarrow A$$

Ces morphismes doivent faire commuter le “pentagone de MacLane”

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \\ \downarrow A \otimes \alpha & & \downarrow \alpha \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \xrightarrow{\alpha \otimes D} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \end{array}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (1 \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes 1) \otimes B \\ \downarrow A \otimes \lambda & & \downarrow \rho \otimes B \\ A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \end{array}$$

Symétrie

Une **symétrie** dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ consiste en une famille d'isomorphismes

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et B , qui vérifie l'égalité:

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B = A \otimes B \xrightarrow{id_{A \otimes B}} A \otimes B$$

et fait commuter les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes 1 & \xrightarrow{\gamma} & 1 \otimes A \\ \rho \downarrow & & \downarrow \lambda \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\gamma} & C \otimes (A \otimes B) \\ A \otimes \gamma \downarrow & & & & \downarrow \alpha \\ A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes C) \otimes B & \xrightarrow{\gamma \otimes B} & (C \otimes A) \otimes B \end{array}$$

Exemples de catégories monoidales

Sans symétrie:

- La catégorie des tresses,
- Nous le verrons bientôt: La catégorie $End(\mathcal{C})$ des endofoncteurs d'une catégorie \mathcal{C} . Les foncteurs $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont ses objets, les transformations naturelles $F \longrightarrow G$ sont ses morphismes, et la composition de foncteur son produit tensoriel.

Avec symétrie:

- La catégorie des permutations,
- Toute catégorie cartésienne, avec le produit cartésien pour tenseur, et l'objet terminal pour unité,
- La catégorie duale d'une catégorie monoïdale symétrique,
- La catégorie \mathbf{Coh} avec tenseur \otimes et unité 1 .

exo. Démontrer que les exemples forment bien des catégorie monoïdales, avec symétrie dans les trois derniers cas.

Le pourquoi des diagrammes de cohérence

“Every diagram commutes”

Effet Canada Dry: Retrouver une conséquence de la propriété universelle... sans la propriété universelle.

Intuitivement: soit A_1, \dots, A_p une liste de p objets dans une catégorie monoïdale \mathcal{C} . Un **mot** w sur (A_1, \dots, A_p) est un objet de la forme:

— 1 lorsque $p = 0$,

— $u \otimes v$ où u est un mot sur (A_1, \dots, A_m) , et v est un mot sur (A_{m+1}, \dots, A_p) , pour un certain $1 \leq m \leq p$.

Parmi les mots sur (A_1, \dots, A_p) , le mot **canonique** $(\dots (A_1 \otimes A_2) \otimes \dots A_p)$.

Théorème de cohérence: il n'existe qu'un seul morphisme structural “ α, λ, ρ ” d'un mot sur (A_1, \dots, A_p) au mot canonique sur (A_1, \dots, A_p) .

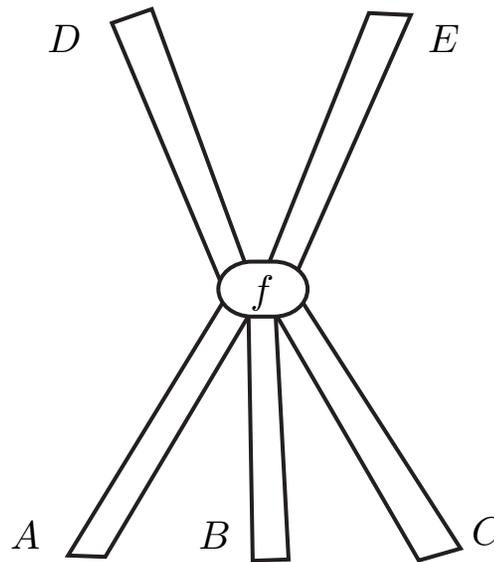
En fait: –1– un seul isomorphisme naturel canonique entre des foncteurs mots $\mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}$. –2– Ou bien: toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une catégorie monoïdale symétrique **stricte**. –3– Ou bien, la catégorie monoïdale symétrique est la catégorie des permutations. **Voir chapitres VII.2 et IX dans MacLane.**

III. La structure de Coh

Diagrammes de corde.

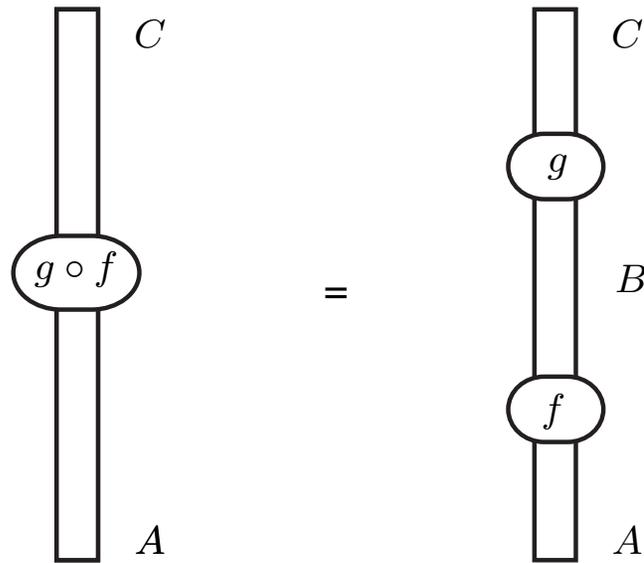
Diagrammes de corde

Un morphisme $f : A \otimes B \otimes C \longrightarrow D \otimes E$ est décrit par le diagramme suivant:



Composition

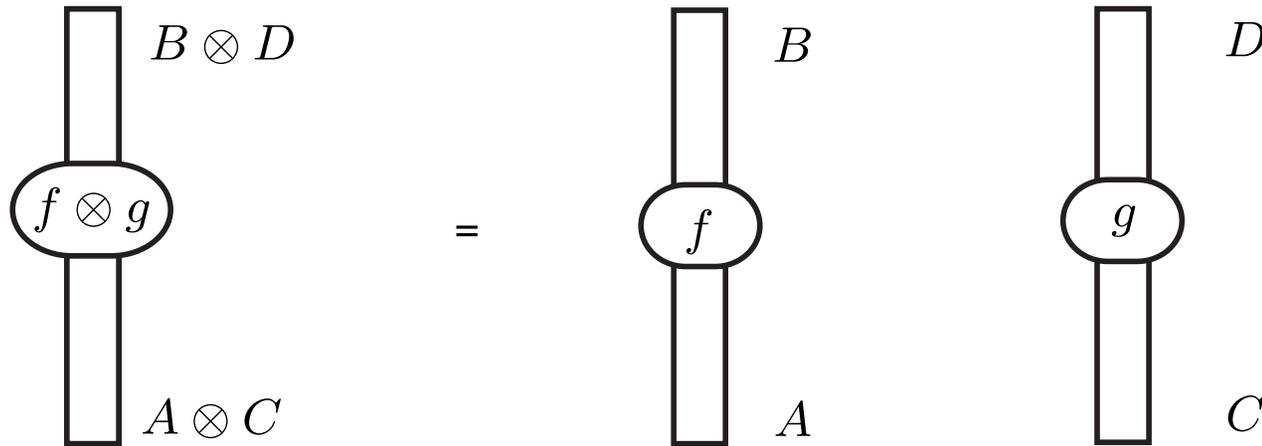
Le morphisme $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est décrit par le diagramme



Composition verticale

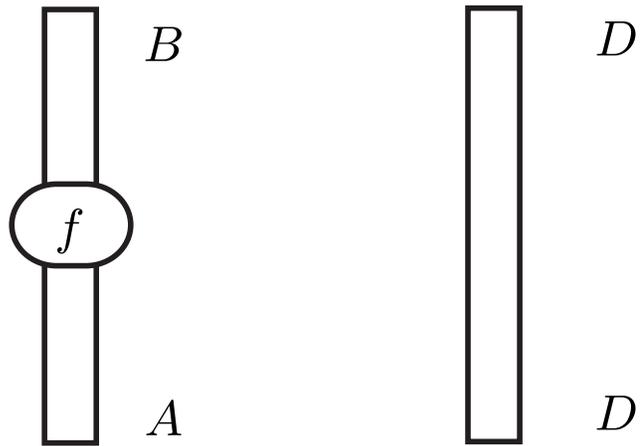
Produit tensoriel

Le morphisme $(A \xrightarrow{f} B) \otimes (C \xrightarrow{g} D)$ est décrit par le diagramme suivant:



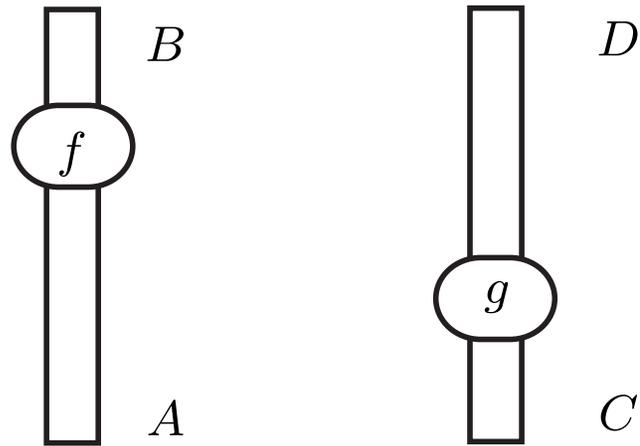
Composition horizontale

Exemple



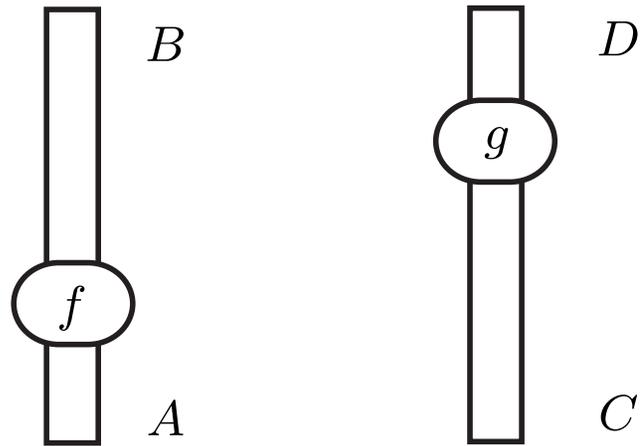
$$f \otimes id_D$$

Exemple



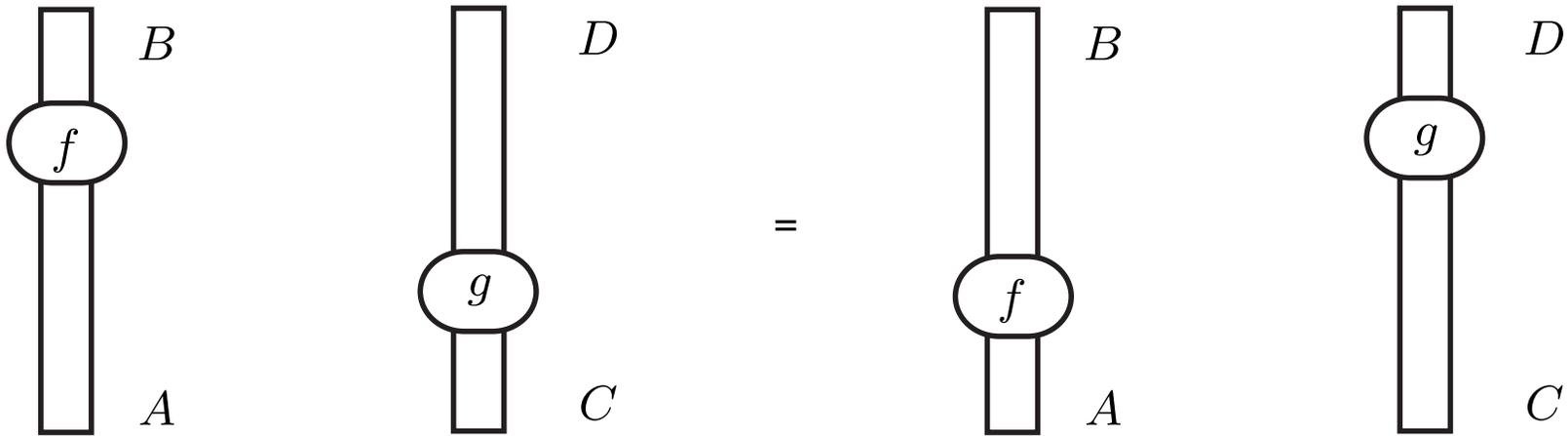
$$(f \otimes id_D) \circ (id_A \otimes g)$$

Exemple



$$(id_B \otimes g) \circ (f \otimes id_C)$$

Sémantique préservée par déformation

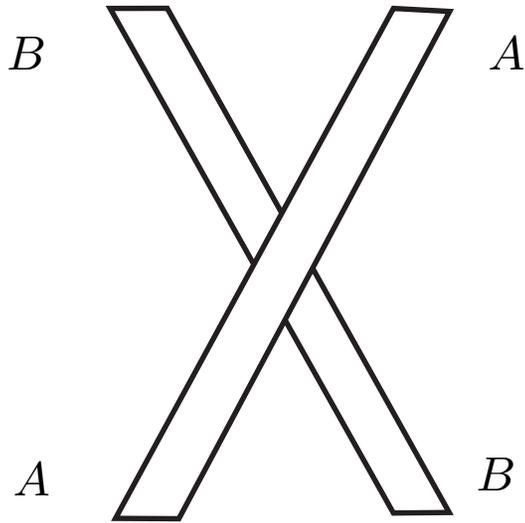


$$(f \otimes id_D) \circ (id_A \otimes g) = (id_B \otimes g) \circ (f \otimes id_C)$$

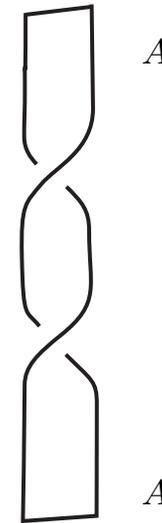
Catégories balancées (Joyal, Street 1993)

Une **catégorie balancée** est une catégorie monoidale munie

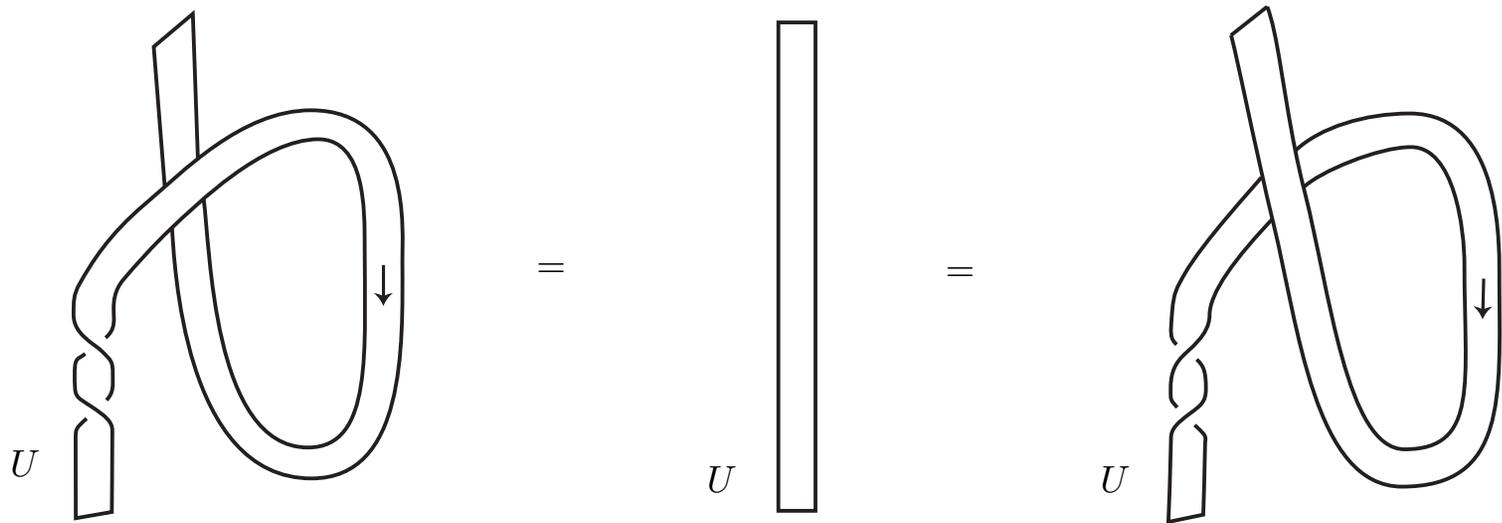
Morphismes de tresse $A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A$



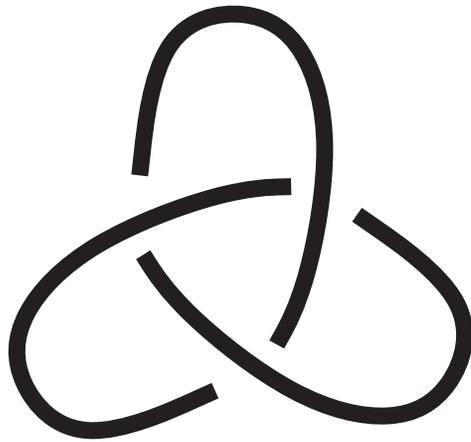
Morphisme de torsion $A \xrightarrow{\theta_A} A$



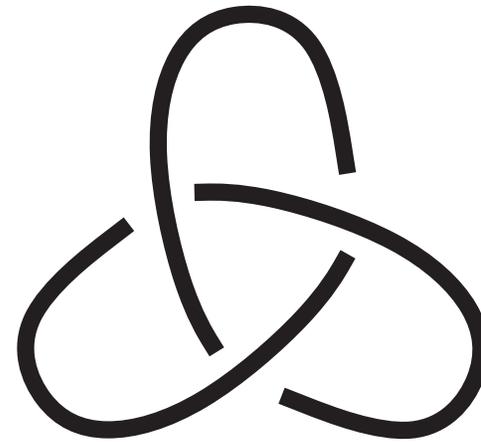
Low dimensional topology



Topologie de petite dimension



\neq

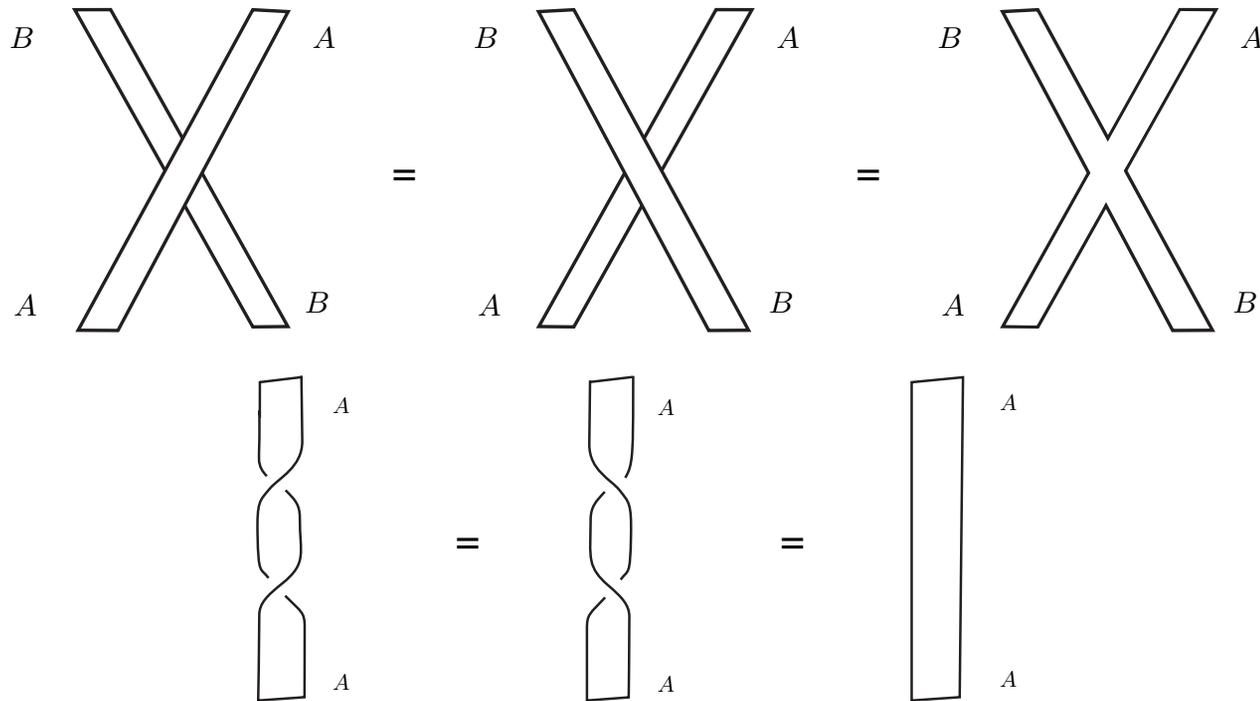


$$2x^{-2} - x^{-4} + x^{-2}y^{-2}$$

$$2x^2 - x^4 + x^2y^2$$

Polynomes de Jones = une sémantique des noeuds

Logic is symmetric — not braided



Une version ruban de la logique linéaire

IV. La structure de Coh

Catégories symétriques monoïdales fermées.

Exponentiation monoïdale

Soit A un objet dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \times, 1)$.

On appelle **exponentiation monoïdale** de A le couple formé par un foncteur

$$(A \multimap -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections indexée par des objets B, C de \mathcal{C} :

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \multimap C)$$

naturelle en B et C .

Catégorie symétrique monoïdale fermée

Une **catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc)** est une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation monoïdale

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \phi_{A,B,C} \quad (1)$$

pour tout objet A .

Par le théorème du paramètre, \multimap définit un bifoncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A , B , et C .

On définit le morphisme **eval** : $A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B$ de la manière suivante:

$$\frac{A \multimap B \xrightarrow{id} A \multimap B}{A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B} \phi_{A \multimap B, A, B}^{-1}$$

exo. Montrer que toute catégorie cartésienne fermée est une catégorie symétrique monoïdale fermée.

Logique linéaire multiplicative intuitionniste

$$A, B ::= 1 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid \alpha$$

Axiome

$$\frac{}{A \vdash A}$$

$$\multimap \text{ gauche} \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$$

$$\multimap \text{ droit} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$$

$$\otimes \text{ gauche} \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$$

$$\otimes \text{ droit} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

$$1 \text{ gauche} \quad \frac{\Gamma, 1 \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

$$1 \text{ droit} \quad \frac{}{\vdash 1}$$

$$\text{Coupure} \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{Permutation} \quad \frac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$$

Interprétation de la logique

Axiome: $A \xrightarrow{id_A} A$

\multimap gauche: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes f \otimes A \multimap B} \Gamma \otimes A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes eval} \Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$$

\multimap droit: $\Gamma \otimes A \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{\Gamma,A,B}(f)} A \multimap B$.

\otimes gauche: $\Gamma \otimes A \otimes B \xrightarrow{f} C$ reste tel qu'en lui-même.

\otimes droit: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} B$ deviennent $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$

Interprétation de la logique (suite)

Coupure: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes f} \Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$$

Permutation: $\Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes \gamma_{A_2, A_1} \otimes \Delta} \Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$$

Remarque: pour simplifier, la catégorie est supposée **stricte**. c'est-à-dire que α , λ et ρ sont toutes des identités.

V. La structure catégorique de \mathbf{Coh} (suite)

Dualité et catégories $*$ -autonomes.

Catégorie *-autonome

Tout couple d'objets A, \perp dans une catégorie symétrique monoïdale fermée $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, définit un morphisme identité

$$id_{A \multimap \perp} : A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp$$

que la bijection $\phi_{A \multimap \perp, A, \perp}^{-1}$ transporte en le morphisme

$$\text{eval} : A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp$$

qui devient en précomposant avec la symétrie:

$$(A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp$$

que la bijection $\phi_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en un morphisme:

$$A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$$

Un objet \perp est **dualisant** lorsque le morphisme canonique $A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est un isomorphisme, pour tout objet A .

Une catégorie symétrique monoïdale fermée avec un objet dualisant est appelé **catégorie *-autonome**.

La catégorie Coh est *-autonome

$\perp = 1^\perp$ est l'espace de cohérence avec la trame singleton $|\perp| = \{*\}$.

$$\begin{array}{lll}
 e = id_{A \multimap \perp} & A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp & \{((a, *), (a, *)) \mid a \in |A|\} \\
 f = \phi_{A \multimap \perp, A, \perp}^{-1}(e) & A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp & \{((a, (a, *)), *) \mid a \in |A|\} \\
 g = f \circ \gamma_{A, A \multimap \perp} & (A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp & \{(((a, *), a), *) \mid a \in |A|\} \\
 h = \phi_{A \multimap \perp, A, \perp}(g) & A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp & \{(a, ((a, *), *)) \mid a \in |A|\}
 \end{array}$$

Le morphisme h est un isomorphisme, d'inverse la clique

$$h^{-1} = \{((a, *), *), a) \mid a \in |A|\}$$

Logique linéaire multiplicative (MLL)

$$A, B ::= A \otimes B \mid 1 \mid A \wp B \mid \perp \mid \alpha$$

Axiome

$$\begin{array}{c}
 \overline{A \vdash A} \\
 \\
 \otimes \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \\
 \\
 \wp \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \\
 \\
 1 \quad \frac{}{\overline{\vdash 1}} \\
 \\
 \perp \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}
 \end{array}$$

La logique MLL s'interprète dans toute catégorie *-autonome.

Logique linéaire multiplicative additive (MALL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid 0 \mid 1 \mid A \& B \mid A \wp B \mid \top \mid \perp \mid \alpha$$

MLL+

\oplus gauche	$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
\oplus droit	$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\&$	$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$
0	pas de règle
\top	$\overline{\vdash \Gamma, \top}$

La logique MALL s'interprète dans toute catégorie à la fois cartésienne et *-autonome.

VI. La structure de Coh (fin)

Exponentielles.

Le nouvel ingrédient: l'exponentielle

On définit l'exponentielle $!A$ d'un espace de cohérence A comme le graphe

— dont la trame $|!A|$ est l'ensemble des cliques finies de A ,

— $u \subset_{!A} v$ ssi l'union $u \cup v$ est une clique finie de A .

exo. Montrer que $!A$ définit un dl-domaine dont $|!A|$ est l'ensemble des éléments compacts, ordonnés par inclusion entre cliques finies.

L'espace de cohérence $?A$ est défini par:

$$?A = (!A^\perp)^\perp$$

L'alchimie exponentielle

Le rôle de l'**exponentielle** est de transmuter les **additifs** en **multiplicatifs**!

Le nom “exponentielle” est justifié par les isomorphismes suivants:

$$!(A \& B) \cong !A \otimes !B \quad !\top \cong 1$$

Réminiscent de $\wp(A + B) \cong \wp(A) \times \wp(B)$ dans **Ens**.

Nous étudierons plus loin les propriétés catégoriques de l'exponentielle $!$. En particulier,

— chaque $!A$ définit un comonoïde $(!A, d_A, e_A)$ dans **Coh**,

— l'exponentielle définit une comonade $(!, \delta, \epsilon)$ dans **Coh**,

— la diagonale cartésienne $A \longrightarrow A \& A$ est transportée sur la diagonale comonoidale $!A \longrightarrow !A \otimes !A$.

exo. Montrer que les égalités $A \otimes (B \& C) \cong (A \otimes B) \& (A \otimes C)$ et $!(A \oplus B) \cong !A \wp !B$ sont fausses. **Début d'un tableau de Mendeleiev!** Effets des polarités, très importants par la suite.

Logique linéaire (LL)

$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid !A \mid 0 \mid 1 \mid A \& B \mid A \wp B \mid ?A \mid \top \mid \perp \mid \alpha$

MALL+

contraction

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$$

déréliction

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

renforcement

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}$$

Monoïde

Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un **monoïde** est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xrightarrow{u} A \longleftarrow m \quad A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{m \otimes A} & A \otimes A \\
 \downarrow A \otimes m & & & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & & & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 \otimes A & \xrightarrow{u \otimes A} & A \otimes A & \xleftarrow{A \otimes u} & A \otimes 1 \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow m & & \downarrow \rho \\
 A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A
 \end{array}$$

Exemple: un monoïde dans $(\mathbf{Ens}, \times, 1)$.

Comonoïde

Dualement: Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un **comonoïde** est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xleftarrow{e} A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{d} & A \otimes A \\
 \downarrow d & & \downarrow d \otimes A \\
 A \otimes A & \xrightarrow{A \otimes d} & A \otimes (A \otimes A) \xrightarrow{\alpha} (A \otimes A) \otimes A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 \otimes A & \xleftarrow{e \otimes A} & A \otimes A & \xrightarrow{A \otimes \eta} & A \otimes 1 \\
 \downarrow \lambda & & \uparrow d & & \downarrow \rho \\
 A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A
 \end{array}$$

Comonoïde co-commutatif

Un comonoïde (A, d, e) dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \gamma)$ est dit **co-commutatif** lorsque

$$A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{\gamma_{A,A}} A \otimes A = A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

Un comonoïde dans Coh: chaque objet $!A$

L'espace de cohérence $!A$ est un comonoïde co-commutatif dans Coh, lorsqu'on l'équipe des cliques suivantes:

— Un morphisme diagonal ou **co-multiplication**

$$!A \xrightarrow{d_A} !A \otimes !A$$

défini par

$$\{(u, (v, w)) \in |!A \multimap !A \otimes !A| \mid u = v \cup w\}$$

— Un morphisme d'affaiblissement ou **co-unité**

$$!A \xrightarrow{e_A} \mathbf{1}$$

défini par le singleton

$$\{(\emptyset, *)\}$$

Prochaine séance

- Interprétation de LL dans Coh,
- construction de la catégorie de Kleisli d'une comonade.

En avant goût... dans la trame de $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.fx \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b)\}, a, b)$

$$\lambda f :!(A \longrightarrow A).\lambda x : A.x \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme (\emptyset, a, a)

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.f(fx) \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b), (b, c)\}, a, c)$