MPRI 2–2 : Domaines. Feuille de TD n° 2
Séance du 8/12/2008

Exercice 0.1 Soient S et T des *ordres* partiels (et non des préordres). Soient $\varphi : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ et $\psi : \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(S)$ des fonctions linéaires telles que $\psi \circ \varphi = \mathsf{Id}$ et $\varphi \circ \psi \leq \mathsf{Id}$ (pour l'ordre ponctuel sur les fonctions).

1. Montrer que φ préserve les premiers. En déduire une fonction $\varphi_0 : S \to T$ telle que $\varphi(\downarrow_S a) = \downarrow_T \varphi_0(a)$ et montrer que φ_0 est croissante et injective.
2. Montrer que si $a, a' \in S$ vérifient $\varphi_0(a) \leq \varphi_0(a')$, alors $a \leq a'$. Autrement dit, avec les notations du cours, si on identifie S et $\varphi_0(S)$ (ce qu'on fait à partir de maintenant), on a $S \sqsubseteq T$.
3. Montrer que $\varphi = \mathsf{inj}^+_{S,T}$ et $\psi = \mathsf{inj}^-_{S,T}$, autrement dit, $(a, b) \in \mathsf{tr}(\varphi)$ ssi $b \leq a$ et $(b, a) \in \mathsf{tr}(\psi)$ ssi $a \leq b$, pour tous $a \in S$ et $b \in T$ (S étant considéré comme sous-ensemble de T, muni de l'ordre induit).

Exercice 0.2 Soit b quelque chose (un symbole, un ensemble, si on décide de travailler dans ZF) qui n'est pas un couple. Si S est un préordre, soit $S_\mathsf{b} = \{\mathsf{b}\} \cup (\{\mathsf{u}\} \times S)$ (où u est un symbole qui est là pour rendre l'union disjointe). On munit S_b du préordre selon lequel $\mathsf{b} \leq c$ pour tout $c \in S_\mathsf{b}$, et $(\mathsf{u}, a) \leq c$ ssi $c = (\mathsf{u}, a')$ avec $a \leq_S a'$.

1. Décrire $\mathcal{I}(S_\mathsf{b})$ en fonction de $\mathcal{I}(S)$ et justifier le nom de "lift" donné à cette opération.
2. Vérifier que $S \mapsto S_\mathsf{b}$ est un type variable. Décrire le plus petit point fixe P de du type variable $S \mapsto 1 \oplus S_\mathsf{b}$. Expliquer pourquoi on appelle P le domaine des entiers paresseux. Définir un successeur, un prédecesseur et une conditionnelle pour ces entiers. Définir une version de PCF travaillant avec de tels entiers.

Exercice 0.3 Dans le modèle de Engeler E_∞ vu en cours, calculer l'interprétation $[M] \in U$ des termes suivants :

- $\lambda x\, x$;
- $\lambda x\, \lambda y\, x$
- $\lambda x\, \lambda y\, (x)\, y$
- $\lambda x\, \lambda y\, (x)\, (x)\, y$
- $\Delta_f = \lambda x\, (f)\, (x)\, x$ (attention : ce terme n'est pas clos)
- $Y = \lambda f\, (\Delta_f)\, \Delta_f$
- $(Y)\, \lambda z\, (z)\, z$.

Exercice 0.4 Un lambda-terme M est en forme normale de tête s'il peut s'écrire

$$M = \lambda x_1 \cdots \lambda x_n\, (x)\, M_1 \cdots M_k$$

Montrer que si M est en forme normale de tête et si $y_1, \ldots, y_p$ est une liste de variables sans répétitions et contenant toutes les variables libres de M, alors $[M]^{y_1,\ldots,y_p} \neq \emptyset$.

Exercice 0.5 On dira qu'un élément a de E_∞ est héréditairement non vide s'il appartient à A (c'est un atome), ou s'il est de la forme (u_0, b) avec $b \in \mathsf{E}_\infty$ héréditairement non vide, et u_0 ensemble fini non vide d'éléments héréditairement non vides.

1. Montrer qu'un terme est normalisable si et seulement s'il est beta-équivalent à un terme normal.
2. Montrer que si M est beta-équivalent à un lambda-terme normal, alors $[M]^{y_1,\ldots,y_p}$ contient un élément héréditairement non vide.
3. Montrer que, réciproquement, si $[M]^{y_1,\ldots,y_p}$ contient un élément héréditairement non vide, alors M est normalisable. Il faut adapter la preuve du théorème de sensibilité du modèle de Engeler vue en cours.

Exercice 0.6 Soit $M \in \mathsf{PCF}$ un terme clos tel que $\vdash M : (\iota \Rightarrow \iota) \Rightarrow \iota$ et soit $P \in \mathsf{PCF}$ un terme clos tel que $\vdash P : \iota \Rightarrow \iota$. On suppose que $(M)\, P$ (qui est clos et de type ι) se réduit en $\underline{n}$ (*i.e.* $(M)\, P\ \beta^*_{\mathrm{PCF}}\ \underline{n}$). Montrer qu'il existe une partie finie I de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout terme de PCF clos P' tel que $\vdash P' : \iota$, si on a

$$\forall p \in I\, \forall k \in \mathbb{N} \quad (P)\, \underline{p}\ \beta^*_{\mathrm{PCF}}\ \underline{k} \Rightarrow (P')\, \underline{p}\ \beta^*_{\mathrm{PCF}}\ \underline{k}$$

alors, on a $(M)\, P'\ \beta^*_{\mathrm{PCF}}\ \underline{n}$. [*Indication:* Utiliser la sémantique de Scott !] Expliquer la signification intuitive de ce résultat.