Travaux Dirigés de Sémantique

Corrections

Paul-André Melliès

<mellies@pps.jussieu.fr>

16 Octobre 2007

Exercice 1.

Question 1a. Nous montrons que l'opération sur les ensembles

$$B \quad \mapsto \quad A \times B \tag{1}$$

définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même. L'équation (1) définit la fonction sous-jacente sur les objets. Reste à définir l'action du foncteur sur les morphismes. Il y a deux façons de procéder: soit directement dans la catégorie Ens, soit plus conceptuellement, en utilisant le fait que le produit définit un produit cartésien dans la catégorie Ens.

Première méthode. A toute fonction

$$f \quad : \quad B \longrightarrow B'$$

on associe la fonction

$$A \times f \quad : \quad A \times B \longrightarrow A \times B'$$

définie de la manière suivante:

$$A \times f \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, f(b)). \tag{2}$$

On vérifie que les deux lois fonctorielles sont vérifiées. Tout d'abord, pour tout ensemble B, la fonction

$$A \times id_B \quad : \quad A \times B \longrightarrow A \times B$$

est définie de la sorte:

$$A \times id_B \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, id_B(b)) = (a, b).$$

On a donc l'égalité:

$$A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B}.$$

Ensuite, soient deux fonctions

$$f : B \longrightarrow B' \qquad\qquad g : B' \longrightarrow B''.$$

On s'assure que la composée de leurs images

$$(A \times g) \circ (A \times f) \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, f(g(b)))$$

est bien égale à l'image de leur composée:

$$A \times (g \circ f) \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, (f \circ g)(b)).$$

Cela démontre que (1) et (2) définit un foncteur de la catégorie <u>Ens</u> dans elle-même.

Deuxième méthode. On utilise le fait que le diagramme

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

définit un produit cartésien dans la catégorie <u>Ens</u>. Pour tout morphisme

$$f \quad : \quad B \longrightarrow B'$$

il existe par universalité du produit cartésien $(A \times B', \pi_1, \pi_2)$ un morphisme unique h qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, dotted, "h"] & \\
A \arrow[dd, "id_A"'] & & B \arrow[dd, "f"] \\
 & A \times B' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B'
\end{tikzcd}$$

On définit

$$A \times f \quad := \quad h. \tag{3}$$

On montre que (1) et (3) définit bien un foncteur, en s'assurant que les lois fonctorielles sont bien vérifiées. Tout d'abord, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "id_{A \times B}"] & \\
A \arrow[dd, "id_A"'] & & B \arrow[dd, "id_B"] \\
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Cela démontre, par unicité de la solution universelle décrite en (3), que

$$A \times id_B \quad = \quad id_{A\times B}.$$

Ensuite, soient deux morphismes:

$$f : B \longrightarrow B' \qquad\qquad g : B' \longrightarrow B''.$$

Par définition de $A \times f$ et $A \times g$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "A\times f"] & \\
A \arrow[dd, "id_A"'] & & B \arrow[dd, "f"] \\
& A\times B' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "A\times g"] & \\
A \arrow[dd, "id_A"'] & & B' \arrow[dd, "g"] \\
& A\times B'' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B''
\end{tikzcd}$$

De cela, on déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, "(A\times g)\circ(A\times f)"] & \\
A \arrow[dd, "id_A"'] & & B \arrow[dd, "g\circ f"] \\
& A\times B'' \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
A & & B''
\end{tikzcd}$$

De nouveau, on déduit de l'unicité de la solution universelle décrite en (3), que

$$A \times (g \circ f) \quad = \quad (A \times g) \circ (A \times f)$$

Ce qui démontre que (1) et (3) définit un foncteur de la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$ dans elle-même.

Remarque. Plus généralement, soit une paire de morphismes

$$f : A \longrightarrow A' \qquad\qquad g : B \longrightarrow B'.$$

Par propriété universelle du produit cartésien

$$A' \xleftarrow{\pi_1} A' \times B' \xrightarrow{\pi_2} B'$$

il existe un unique morphisme h faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, dotted, "h"] & \\
A \arrow[dd, "f"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\
 & A' \times B' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A' & & B'
\end{tikzcd} \tag{4}$$

On définit le morphisme

$$f \times g \quad := \quad h.$$

On montre que cette construction définit un foncteur de la catégorie $\underline{\text{Ens}} \times \underline{\text{Ens}}$ dans la catégorie $\underline{\text{Ens}}$ de la même façon. Prouvons ici une des deux lois de fonctorialité. Soit une paire de morphismes

$$(f, g) \quad : \quad A \times B \longrightarrow A' \times B' \qquad\qquad (f', g') \quad : \quad A' \times B' \longrightarrow A'' \times B''$$

de la catégorie $\underline{\text{Ens}} \times \underline{\text{Ens}}$. Par définition de $f \times g$ et de $f' \times g'$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "f \times g"] & \\
A \arrow[dd, "f"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\
 & A' \times B' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "f' \times g'"] & \\
A' \arrow[dd, "f'"'] & & B' \arrow[dd, "g'"] \\
 & A'' \times B'' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A'' & & B''
\end{tikzcd}$$

De cela, on déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "(f' \times g') \circ (f \times g)"] & \\
A \arrow[dd, "f' \circ f"'] & & B \arrow[dd, "g' \circ g"] \\
& A'' \times B'' \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A'' & & B''
\end{tikzcd}$$

On déduit alors de l'unicité de la solution universelle décrite en (4), que

$$(f' \circ f) \times (g' \circ g) \quad = \quad (g' \times g) \circ (f' \times f)$$

Question 1b. Nous montrons que l'opération sur les ensembles

$$B \quad \mapsto \quad A \times B \tag{5}$$

définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même. De nouveau, on a deux méthodes: l'une directe, et l'autre plus conceptuelle, qui utilise la propriété universelle du morphisme d'évaluation:

$$\text{eval} \quad : \quad A \times (A \Rightarrow B) \quad \longrightarrow \quad B$$

vue en cours.

Première méthode. A toute fonction

$$g \quad : \quad B \longrightarrow B'$$

on associe la fonction:

$$A \Rightarrow h \quad : \quad A \Rightarrow B \longrightarrow A \Rightarrow B'$$

définie par post-composition:

$$A \Rightarrow g \quad : \quad f \mapsto g \circ f. \tag{6}$$

On montre les deux propriétés fonctorielles comme suit. Tout d'abord, pour tout ensemble B, la fonction

$$A \Rightarrow id_B \quad : \quad A \Rightarrow B \longrightarrow A \Rightarrow B$$

est définie de la sorte:

$$A \Rightarrow id_B \quad : \quad f \mapsto id_B \circ f = f$$

On a donc l'égalité:

$$A \Rightarrow id_B \quad = \quad id_{A \Rightarrow B}.$$

Ensuite, soient deux fonctions

$$g : B \longrightarrow B' \qquad\qquad h : B' \longrightarrow B''.$$

On s'assure que la composée de leurs images

$$(A \Rightarrow h) \circ (A \times g) \quad : \quad f \mapsto h \circ (g \circ f)$$

est bien égale à l'image de leur composée:

$$A \times (h \circ g) \quad : \quad f \mapsto (h \circ g) \circ f$$

en utilisant la propriété d'associativité de la composition de fonction. Cela démontre que (5) et (6) définit un foncteur de la catégorie <u>Ens</u> dans elle-même.

Deuxième méthode. Par la propriété universelle, toute fonction

$$g \quad : \quad B \quad \longrightarrow \quad B'$$

détermine un et un seul morphisme

$$h \quad : \quad A \Rightarrow B \quad \longrightarrow \quad A \Rightarrow B'$$

tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, dotted, "A \times h"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] & A \times (A \Rightarrow B') \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
B \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

On définit:

$$A \Rightarrow g \quad := \quad h \tag{7}$$

On montre que (5) et (7) vérifient bien les deux lois fonctorielles. Tout d'abord, pour tout objet B, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, "id_{A \times (A \Rightarrow B)}"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] & A \times (A \Rightarrow B) \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}$$

On a démontré dans la question (1a) que $A \times -$ définit un foncteur. Cela assure que l'égalité suivante est vérifiée:

$$id_{A\times(A\Rightarrow B)} \quad = \quad A \times id_{A\Rightarrow B}.$$

De ce fait, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, "A\times id_{A\Rightarrow B}"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] & A \times (A \Rightarrow B) \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Par unicité de la solution universelle, on en déduit l'égalité recherchée:

$$A \Rightarrow id_B \quad = \quad id_{A\Rightarrow B}.$$

Vérifions la seconde loi fonctorielle. Soit une paire de morphismes:

$$g : B \longrightarrow B' \qquad\qquad g' : B' \longrightarrow B''.$$

Par définition, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, "A\times(A\Rightarrow g)"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] & A \times (A \Rightarrow B') \arrow[r, "A\times(A\Rightarrow g')"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"] & A \times (A \Rightarrow B'') \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
B \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "g'"] & B''
\end{tikzcd}$$

On en déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[r, "A\times(A\Rightarrow g')\circ A\times(A\Rightarrow g)"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] & A \times (A \Rightarrow B'') \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
B \arrow[r, "g'\circ g"] & B''
\end{tikzcd}$$

De nouveau, on utilise le fait que $A \times -$ définit un foncteur. On a donc l'égalité suivante:

$$A \times (A \Rightarrow g') \circ A \times (A \Rightarrow g) \quad = \quad A \times ((A \Rightarrow g') \circ (A \Rightarrow g)).$$

On en déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \Rightarrow B) \arrow[rr, "A\times((A\Rightarrow g')\circ(A\Rightarrow g))"] \arrow[d, "\text{eval}"'] & & A \times (A \Rightarrow B'') \arrow[d, "\text{eval}"] \\
B \arrow[rr, "g'\circ g"] & & B''
\end{tikzcd}$$

De là, on déduit l'égalité recherchée par unicité de la solution universelle:

$$(A \Rightarrow g') \circ (A \Rightarrow g) \quad = \quad A \Rightarrow (g' \circ g).$$

De cela, on conclut que (5) et (6) définit bien un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même.

Exercice 2.

La réponse à cette question se trouve dans les transparents.