

Travaux Dirigés de Sémantique

Corrections

Paul-André Mellies

<mellies@pps.jussieu.fr>

16 Octobre 2007

Exercice 1.

Question 1a. Nous montrons que l'opération sur les ensembles

$$B \mapsto A \times B \tag{1}$$

définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même. L'équation (1) définit la fonction sous-jacente sur les objets. Reste à définir l'action du foncteur sur les morphismes. Il y a deux façons de procéder: soit directement dans la catégorie Ens, soit plus conceptuellement, en utilisant le fait que le produit définit un produit cartésien dans la catégorie Ens.

Première méthode. A toute fonction

$$f : B \longrightarrow B'$$

on associe la fonction

$$A \times f : A \times B \longrightarrow A \times B'$$

définie de la manière suivante:

$$A \times f : (a, b) \mapsto (a, f(b)). \tag{2}$$

On vérifie que les deux lois fonctorielles sont vérifiées. Tout d'abord, pour tout ensemble B , la fonction

$$A \times id_B : A \times B \longrightarrow A \times B$$

est définie de la sorte:

$$A \times id_B : (a, b) \mapsto (a, id_B(b)) = (a, b).$$

On a donc l'égalité:

$$A \times id_B = id_{A \times B}.$$

Ensuite, soient deux fonctions

$$f : B \longrightarrow B' \qquad g : B' \longrightarrow B''.$$

On s'assure que la composée de leurs images

$$(A \times g) \circ (A \times f) \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, f(g(b)))$$

est bien égale à l'image de leur composée:

$$A \times (g \circ f) \quad : \quad (a, b) \mapsto (a, (f \circ g)(b)).$$

Cela démontre que (1) et (2) définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même.

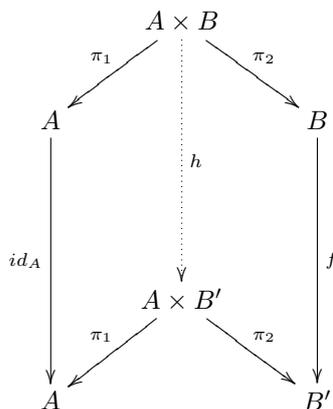
Deuxième méthode. On utilise le fait que le diagramme

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

définit un produit cartésien dans la catégorie Ens. Pour tout morphisme

$$f \quad : \quad B \longrightarrow B'$$

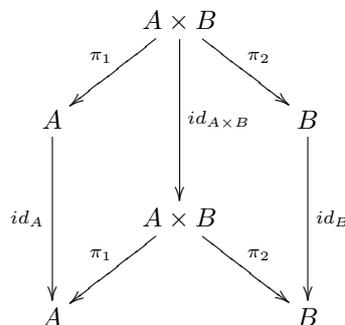
il existe par universalité du produit cartésien $(A \times B', \pi_1, \pi_2)$ un morphisme unique h qui fait commuter le diagramme suivant:



On définit

$$A \times f \quad := \quad h. \tag{3}$$

On montre que (1) et (3) définit bien un foncteur, en s'assurant que les lois fonctorielles sont bien vérifiées. Tout d'abord, le diagramme suivant commute:



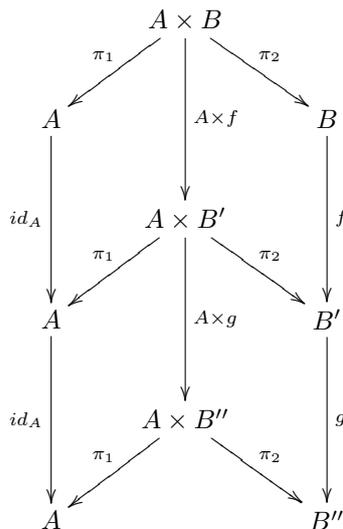
Cela démontre, par unicité de la solution universelle décrite en (3), que

$$A \times id_B = id_{A \times B}.$$

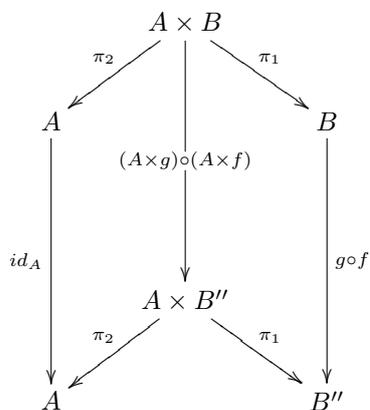
Ensuite, soient deux morphismes:

$$f : B \longrightarrow B' \qquad g : B' \longrightarrow B''.$$

Par définition de $A \times f$ et $A \times g$, le diagramme suivant commute:



De cela, on déduit que le diagramme suivant commute:



De nouveau, on déduit de l'unicité de la solution universelle décrite en (3), que

$$A \times (g \circ f) = (A \times g) \circ (A \times f)$$

Ce qui démontre que (1) et (3) définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même.

Remarque. Plus généralement, soit une paire de morphismes

$$f : A \longrightarrow A' \qquad g : B \longrightarrow B'.$$

Par propriété universelle du produit cartésien

$$A' \xleftarrow{\pi_1} A' \times B' \xrightarrow{\pi_2} B'$$

il existe un unique morphisme h faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \vdots h & \searrow \pi_2 & \\
 A & & & & B \\
 \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g \\
 & \swarrow \pi_1 & A' \times B' & \searrow \pi_2 & \\
 A' & & & & B'
 \end{array} \tag{4}$$

On définit le morphisme

$$f \times g := h.$$

On montre que cette construction définit un foncteur de la catégorie $\underline{\text{Ens}} \times \underline{\text{Ens}}$ dans la catégorie $\underline{\text{Ens}}$ de la même façon. Prouvons ici une des deux lois de functorialité. Soit une paire de morphismes

$$(f, g) : A \times B \longrightarrow A' \times B' \qquad (f', g') : A' \times B' \longrightarrow A'' \times B''$$

de la catégorie $\underline{\text{Ens}} \times \underline{\text{Ens}}$. Par définition de $f \times g$ et de $f' \times g'$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \downarrow f \times g & \searrow \pi_2 & \\
 A & & & & B \\
 \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g \\
 & \swarrow \pi_1 & A' \times B' & \searrow \pi_2 & \\
 A' & & \downarrow f' \times g' & & B' \\
 \downarrow f' & & \downarrow & & \downarrow g' \\
 & \swarrow \pi_1 & A'' \times B'' & \searrow \pi_2 & \\
 A'' & & & & B''
 \end{array}$$

De cela, on déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \downarrow & \searrow \pi_2 & \\
 A & & (f' \times g') \circ (f \times g) & & B \\
 \downarrow f' \circ f & & \downarrow & & \downarrow g' \circ g \\
 & \swarrow \pi_1 & A'' \times B'' & \searrow \pi_2 & \\
 A'' & & & & B''
 \end{array}$$

On déduit alors de l'unicité de la solution universelle décrite en (4), que

$$(f' \circ f) \times (g' \circ g) = (g' \times g) \circ (f' \times f)$$

Question 1b. Nous montrons que l'opération sur les ensembles

$$B \mapsto A \times B \tag{5}$$

définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même. De nouveau, on a deux méthodes: l'une directe, et l'autre plus conceptuelle, qui utilise la propriété universelle du morphisme d'évaluation:

$$\text{eval} : A \times (A \Rightarrow B) \longrightarrow B$$

vue en cours.

Première méthode. A toute fonction

$$g : B \longrightarrow B'$$

on associe la fonction:

$$A \Rightarrow h : A \Rightarrow B \longrightarrow A \Rightarrow B'$$

définie par post-composition:

$$A \Rightarrow g : f \mapsto g \circ f. \tag{6}$$

On montre les deux propriétés fonctorielles comme suit. Tout d'abord, pour tout ensemble B , la fonction

$$A \Rightarrow id_B : A \Rightarrow B \longrightarrow A \Rightarrow B$$

est définie de la sorte:

$$A \Rightarrow id_B : f \mapsto id_B \circ f = f$$

On a donc l'égalité:

$$A \Rightarrow id_B = id_{A \Rightarrow B}.$$

Ensuite, soient deux fonctions

$$g : B \longrightarrow B' \quad h : B' \longrightarrow B''.$$

On s'assure que la composée de leurs images

$$(A \Rightarrow h) \circ (A \times g) : f \mapsto h \circ (g \circ f)$$

est bien égale à l'image de leur composée:

$$A \times (h \circ g) : f \mapsto (h \circ g) \circ f$$

en utilisant la propriété d'associativité de la composition de fonction. Cela démontre que (5) et (6) définit un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même.

Deuxième méthode. Par la propriété universelle, toute fonction

$$g : B \longrightarrow B'$$

détermine un et un seul morphisme

$$h : A \Rightarrow B \longrightarrow A \Rightarrow B'$$

tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{A \times h} & A \times (A \Rightarrow B') \\ \text{eval} \downarrow & & \downarrow \text{eval} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

On définit:

$$A \Rightarrow g := h \tag{7}$$

On montre que (5) et (7) vérifient bien les deux lois fonctorielles. Tout d'abord, pour tout objet B , le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{id_{A \times (A \Rightarrow B)}} & A \times (A \Rightarrow B) \\ \text{eval} \downarrow & & \downarrow \text{eval} \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array}$$

On a démontré dans la question (1a) que $A \times -$ définit un foncteur. Cela assure que l'égalité suivante est vérifiée:

$$id_{A \times (A \Rightarrow B)} = A \times id_{A \Rightarrow B}.$$

De ce fait, le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{A \times id_{A \Rightarrow B}} & A \times (A \Rightarrow B) \\ \text{eval} \downarrow & & \downarrow \text{eval} \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array}$$

Par unicité de la solution universelle, on en déduit l'égalité recherchée:

$$A \Rightarrow id_B = id_{A \Rightarrow B}.$$

Vérifions la seconde loi fonctorielle. Soit une paire de morphismes:

$$g : B \longrightarrow B' \qquad g' : B' \longrightarrow B''.$$

Par définition, le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{A \times (A \Rightarrow g)} & A \times (A \Rightarrow B') & \xrightarrow{A \times (A \Rightarrow g')} & A \times (A \Rightarrow B'') \\ \text{eval} \downarrow & & \downarrow \text{eval} & & \downarrow \text{eval} \\ B & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{g'} & B'' \end{array}$$

On en déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{A \times (A \Rightarrow g') \circ A \times (A \Rightarrow g)} & A \times (A \Rightarrow B'') \\ \text{eval} \downarrow & & \downarrow \text{eval} \\ B & \xrightarrow{g' \circ g} & B'' \end{array}$$

De nouveau, on utilise le fait que $A \times -$ définit un foncteur. On a donc l'égalité suivante:

$$A \times (A \Rightarrow g') \circ A \times (A \Rightarrow g) = A \times ((A \Rightarrow g') \circ (A \Rightarrow g)).$$

On en déduit que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{A \times ((A \Rightarrow g') \circ (A \Rightarrow g))} & A \times (A \Rightarrow B'') \\
 \downarrow \text{eval} & & \downarrow \text{eval} \\
 B & \xrightarrow{g' \circ g} & B''
 \end{array}$$

De là, on déduit l'égalité recherchée par unicité de la solution universelle:

$$(A \Rightarrow g') \circ (A \Rightarrow g) = A \Rightarrow (g' \circ g).$$

De cela, on conclut que (5) et (6) définit bien un foncteur de la catégorie Ens dans elle-même.

Exercice 2.

La réponse à cette question se trouve dans les transparents.